Corolário: Teorema da Dimensão

(02. Transformações Lineares, Slide 15)

Para a Demonstração, será considerada a seguinte abordagem: Se qualquer das afirmações for verificada, implicará na seguinte, e assim todas serão verdadeiras. Suponha que a hipótese (a) está comprovada. Deve-se mostrar as seguintes implicações: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a), fechando o ciclo.

PROVA:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Se T é sobrejetora, então T é bijetora. Basta mostrar que T é injetora ($N(T) = \{\vec{0}\}$):

Se T é sobrejetora, $Im(T) = W$, então $\forall\, \vec{w} \in W$, $\exists$ algum $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$.

Como $Im(T) = W \longrightarrow \dim(Im(T)) = \dim(W)$ e, pelo Teorema da Dimensão:

$$\overset{= \dim(W)}{\dim(V)} = \dim(N(T)) + \overset{= \dim(W)}{\dim(Im(T))}$$

$$\longrightarrow \dim(N(T)) = 0 \Rightarrow N(T) = \{\vec{0}\}$$

Então T é <u>injetora e, portanto, bijetora.</u>

(b) => (c)

Como T é bijetora, diretamente T é injetora.

(c) => (d)

Se T é injetora, mostrar que T leva uma base de V em uma base de W.

Suponha $B_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V; então mostrar que $B_2 = \{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ é base de W.

Da hipótese: $\dim(V) = \dim(W) = n$. Logo, B_1 e B_2 têm n elementos; portanto, basta mostrar que B_2 é LI.

$$\beta_1 T(\vec{v}_1) + \dots + \beta_n T(\vec{v}_n) = \vec{0}$$

$$\Big\downarrow \text{ Aplicando a linearidade}$$

$$T(\underbrace{\boxed{\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n}}_{\vec{v}}) = \vec{0}$$

Conclui-se que $\vec{v} \in N(T)$. Mas T é injetora, portanto $N(T) = \{\vec{0}\}$ e $\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Mas essa é uma CL dos vetores da base B_1 (LI); desta forma, $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$.

Então B_2 é LI e, consequentemente, base de W.

(d) ⇒ (a)

Se T leva de base de V em base de W, provar que T é sobrejetora. Se T é sobrejetora, $Im(T) = W$ e $\forall \vec{w} \in W$, $\exists$ algum $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$.

Da hipótese: se $B_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é base de V, então $B_2 = \{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ é base de W. Assim, qualquer $\vec{w} \in W$ pode ser escrito como CL dos elementos da base B_2:

$$\vec{w} = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n)$$

Aplicando a linearidade

$$\vec{w} = T(\underbrace{\boxed{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n}}_{\vec{v}})$$

E como B_1 é base de V, $\vec{v} \in V$.

Logo, $T(\vec{v}) = \vec{w}$ para algum $\vec{v} \in V$ e T é sobrejetora.