AULAS ANTERIORES

23/09/2020

Seja $T: V \longrightarrow W$ uma TL, então:

(I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

(II) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \forall \vec{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Propriedades:

1) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

2) $T(a_1\vec{v_1} + \dots + a_n\vec{v_n}) = a_1 T(\vec{v_1}) + \dots + a_n T(\vec{v_n})$

Slide 8 - Exemplo (1)

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T(x,y) = x+y.$ $N(T) = ?$

$N(T) = \{ \vec{v} = (x,y) \in V / T(\vec{v}) = 0 \},$

$0 \in W = \mathbb{R}$

$T(x,y) = 0$

$x+y = 0$

$y = -x \quad \therefore \quad \vec{v} = (x,y) = (x,-x) = x(1,-1)$

Assim: $N(T) = \{ x(1,-1) \,;\, x \in \mathbb{R} \}$ ou $N(T) = [(1,-1)]$

Slide 9 - Teorema I

→ Sabe-se que $N(T)$ é um conjunto e, portanto, pode ter mais de 1 elemento, o que implicaria vetores distintos do domínio com a mesma imagem no contra-domínio. Desta forma, ao garantir que ∃ somente 1 elemento em $N(T)$, garante-se que a TL é injetora. Das propriedades de TL, $T(\vec{0}) = \vec{0} \therefore$ se $N(T) = \{\vec{0}\}$, T é injetora.

Slide 13 - Exemplo (2)

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x,y,0)$

$\begin{cases} N(T) \text{ e } B_N \\ Im(T) \text{ e } B_{Im} \\ \dim(N(T)) \text{ e } \dim(Im(T)) \end{cases}$?

$N(T) = \{ \vec{v} \in V \ / \ T(\vec{v}) = \vec{0} \}$

$\vec{0} \in W = \mathbb{R}^3$

$$\underset{\vec{v} \in V}{T(x,y,z)} = \underset{\vec{0} \in W}{(0,0,0)}$$

$$(x,y,0) = (0,0,0) \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \boxed{0 = 0} \end{cases} \longrightarrow 0z = 0 \ \therefore z \in \mathbb{R}$$

$0z$

$N(T) = \{ (0,0,z) \ / \ z \in \mathbb{R} \}$

$\vec{v}_N = (0,0,z) = z(0,0,1)$, $z \in \mathbb{R}$

$\therefore B_N = \{(0,0,1)\} \longrightarrow \dim(N(T)) = 1$ //

$Im(T) = \{ \vec{w} \in W \ / \ T(\vec{v}) = \vec{w} \}$, $\vec{w} = (a,b,c) \in Im(T)$

$$\underset{\vec{v} \in V}{T(x,y,z)} = \underset{\vec{w} \in W}{(a,b,c)}$$

$$(x,y,0) = (a,b,c) \longrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = 0 \end{cases}, \ x,y \in \mathbb{R}$$

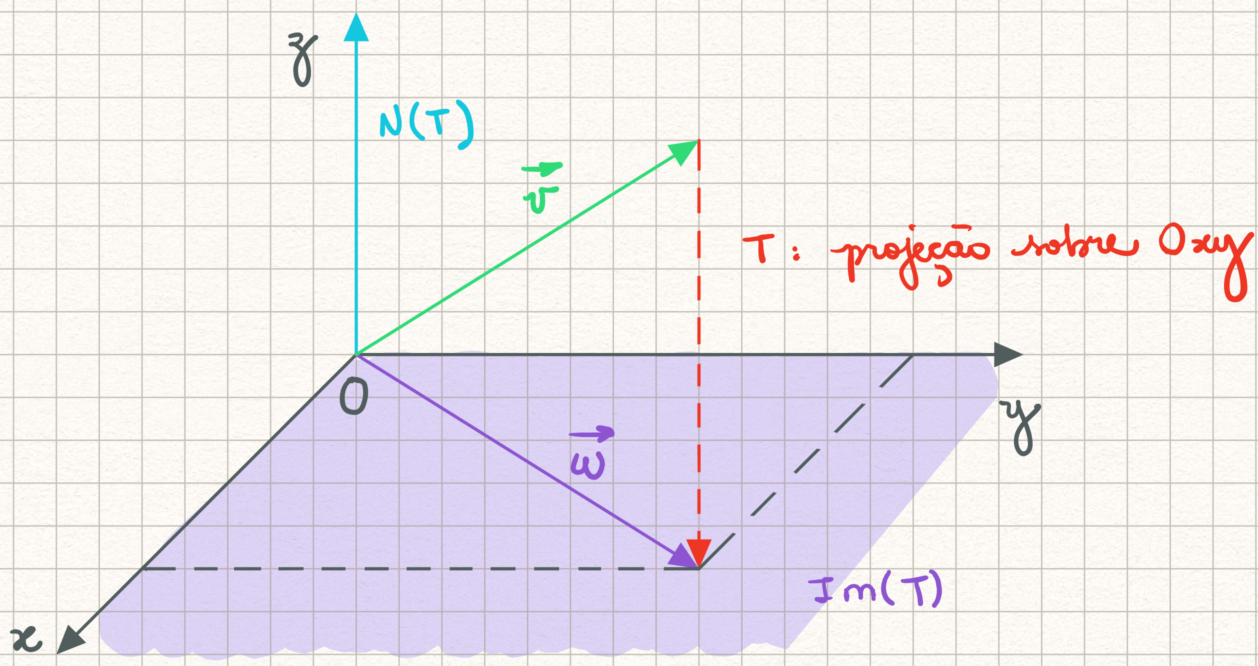
$Im(T) = \{ (x,y,0) \ / \ x,y \in \mathbb{R} \}$

$\vec{w}_{Im} = (x,y,0) = (x,0,0) + (0,y,0)$

$\vec{w}_{Im} = x(1,0,0) + y(0,1,0)$

$\therefore B_{Im} = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \longrightarrow \dim(Im(T)) = 2$ //

Interpretação Geométrica



Slide 17 - Exercícios

3 e 4 :

a) $N(T)$? B_N e $\dim(N(T))$? T é injetora ? Justifique.

b) $Im(T)$? B_{Im} e $\dim(Im(T))$? T é sobrejetora ? Justifique.

LEMBRE-SE :

T é injetora $\Leftrightarrow$ $N(T) = \{\vec{0}\}$ $\Rightarrow$ $\dim(N(T)) = 0$

$\vec{0}$: vetor nulo do domínio V

injetora: Característica associada ao domínio de T.

T é sobrejetora $\Leftrightarrow$ $Im(T) = W$ $\Rightarrow$ $\dim(Im(T)) = \dim(W)$

W: contra-domínio

sobrejetora: Característica associada à imagem de T.

3) $T: P_1(x) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(ax+b) = (a, b, a-b)$

a) $N(T) = \{ \vec{v} \in V \,/\, T(\vec{v}) = \vec{0} \}, \quad \begin{cases} \vec{v} = p = ax+b \in V = P_1(x) \\ \vec{0} = (0,0,0) \in W = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$T(p) = \vec{0}$

$(a, b, a-b) = (0,0,0) \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$\boxed{p = ax+b = 0x+0 = 0}$

$\therefore N(T) = \{0\} \longrightarrow \dim(N(T)) = 0$, logo $\nexists$ B_N.

$0 + 0x \ldots$ pol nulo $\longrightarrow$ T é injetora

b) $Im(T) = \{ \vec{w} \in W \,/\, T(\vec{v}) = \vec{w} \}, \quad \begin{cases} \vec{v} = p = ax+b \in V \\ \vec{w} = (x, y, z) \in W \end{cases}$

$T(p) = \vec{w}$

$(a, b, a-b) = (x, y, z) \quad \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = a - b \longrightarrow z = x - y \end{cases}$

$\therefore Im(T) = \{ (x, y, x-y) \,/\, x, y \in \mathbb{R} \}$

2 vetores LI

$\vec{w}_{Im} = (x, y, x-y) = \underbrace{x(1,0,1) + y(0,1,-1)}_{(x,0,x) + (0,y,-y)}$

$\therefore B_{Im} = \{ (1,0,1), (0,1,-1) \}$ e $\dim(Im(T)) = 2$

$W = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \dim(W) = 3 \neq \dim(Im(T))$.

SOBREJETORA
se $W = Im(T)$

$\therefore$ T não é sobrejetora.

4) $T: M(2,2) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-b, a+b)$

a) $N(T) = \{ \vec{v} \in V \,/\, T(\vec{v}) = \vec{0} \}, \quad \begin{cases} \vec{v} = M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \\ \vec{0} = (0,0) \in W = \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$T(M) = \vec{0}$

$(a-b, a+b) = (0,0) \longrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \longrightarrow a=b=0$

$\therefore N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} ; c, d \in \mathbb{R} \right\} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ T não é injetora

2 matrizes LI

$\vec{v}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore B_N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\dim(N(T)) = 2$

b) $Im(T) = \{ \vec{w} \in W \,/\, T(\vec{v}) = \vec{w} \}, \quad \begin{cases} \vec{v} = M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \\ \vec{w} = (x,y) \in W = \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$T(M) = \vec{w}$

$(a-b, a+b) = (x,y) \longrightarrow \boxed{x = a-b \; ; \; y = a+b}$

Esta solução garante que $\forall M \in V = M(2,2) \; \exists \; \vec{w} \in W = \mathbb{R}^2$!!

$\therefore Im(T) = \{(x,y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$

T é sobrejetora, pois $Im(T) = W = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim(Im(T)) = 2$

$B_{Im} \longrightarrow$ quaisquer 2 vetores LI $\longrightarrow B_{Im} = \{(1,0), (0,1)\}$

5) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\begin{cases} T(-2,3) = (-1,0,1) \\ T(1,-2) = (0,-1,0) \end{cases}$

$T(x,y) = ?$

$N(T) = ?$; $Im(T) = ?$; Injetora e/ou Sobrejetora? Justifique.

a) Encontrar $T(x,y)$

(i) Verificar se $\begin{cases} \vec{v_1} = (-2,3) \\ \vec{v_2} = (1,-2) \end{cases}$ formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

(ii) Se $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é base, então todo $\vec{v} = (x,y) \in V$ pode ser escrito como CL da base: $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$.

$\longrightarrow$ Determinam-se a_1, a_2.

(iii) Aplicar a Propriedade de TL:

$$T(\vec{v}) = T(a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2})$$

$$T(x,y) = a_1 T(\vec{v_1}) + a_2 T(\vec{v_2})$$

$$\vdots$$

$$T(x,y) = (2x+y,\ 3x+2y,\ -2x-y)$$

b) $N(T)$; $Im(T)$

$\longrightarrow N(T) = \{\vec{v} \in V \ / \ T(\vec{v}) = \vec{0}\}$, $\vec{0} = (0,0,0) \in W$

$T(\vec{v}) = \vec{0}$

$(2x+y,\ 3x+2y,\ -2x-y) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x+y = 0 \\ 3x+2y = 0 \\ -2x-y = 0 \end{cases} \longrightarrow x = y = 0$$

$\therefore$ $N(T) = \{\vec{0}\}$ e $\dim(N(T)) = 0$

$\longrightarrow \quad Im(T) = \{ \vec{w} \in W \,/\, T(\vec{v}) = \vec{w} \}$, $\vec{w} = (a,b,c) \in W$

$T(\vec{v}) = \vec{w}$

$(2x+y, 3x+2y, -2x-y) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} 2x+y = a & (I) \\ 3x+2y = b & (II) \\ -2x-y = c & (III) \end{cases}$$

Comparando (I) e (III) : $c = -a$

De (II) : $b = 3x+2y \longrightarrow$ $\nexists$ restrição para a obtenção de b , logo $b \in \mathbb{R}$

Desta forma:

$$\vec{w} = (a,b,c) = (a,b,-a) = a(1,0,-1) + b(0,1,0)$$

Portanto:

$Im(T) = \{ (a,b,-a) \,/\, a,b \in \mathbb{R} \}$ e $\dim(Im(T)) = 2$

c) T é injetora, pois $N(T) = \{\vec{0}\}$.

T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$