PME 3534 – Técnicas Experimentais e Computacionais em Biomecânica em Sistemas Vasculares

Aula: 23/09/20

Prof. Jayme P. Ortiz

Método dos Volumes Finitos: Problemas de Difusão Pura e de Difusão com Convecção

1. Problema de Difusão Pura Uni, Bi e Tridimensional

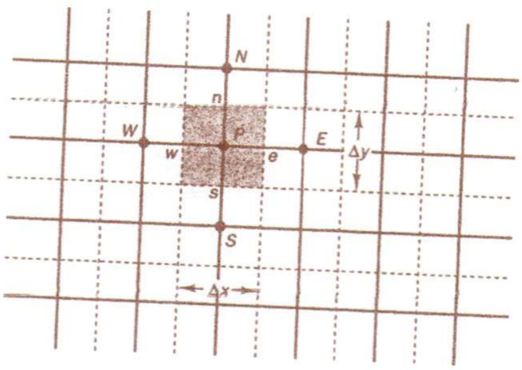
$$\frac{\partial(\rho\,\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\,\phi\;\vec{V}\right) = \operatorname{div}\left(\Gamma\,\operatorname{grad}\phi\right) + S_\phi \qquad \text{(I)}$$

No caso de Difusão Pura, Unidimensional, Permanente (aula passada), a equação (I) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S_\phi = 0 \qquad \text{(II)}$$

1.1. Difusão Pura Bidimensional

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S_\phi = 0 \qquad \text{(III)}$$



A integração da equação III resulta:

$$\int_{\forall} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx\,.dy + \int_{\forall} \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dx\,.dy + \int_{\forall} S_{\phi} d\forall = 0$$

$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_s\right]$ + S ΔϒSUBST

0 (IV)

Utilizando as aproximações do método dos volumes finitos apresentadas na aula passada, tem-se os fluxos difusivos através das faces *w, e, s, n,* respectivamente:

$$\Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w]_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right)$$

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e]_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right)$$

$$\Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s]_s = \Gamma_s A_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}}\right)$$

$$\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n]_n = n A_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}}\right)$$

(V)

Substituindo as equações V na equação IV e admitindo a fonte representada linearmente:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + \Gamma_n A_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}}\right) + \Gamma_s A_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}}\right) + (S_u + S_P \phi_P) = 0$$

Ou

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w + \frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n + \frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s - S_P\right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s\right) \phi_S + \left(\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n\right) \phi_N + S_u \qquad \text{(VI)}$$

Equação discretizada geral:

$$a_P \emptyset_P = a_W \emptyset_W + a_E \emptyset_E + a_S \emptyset_S + a_N \emptyset_N + S_u$$

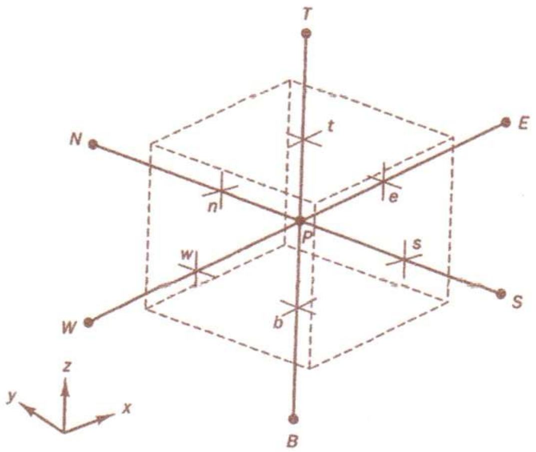
Onde:

a_W	a_E	a_S	a_N	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$a_W + a_E + a_S + a_N - S_u$

1.2. Difusão Pura Tridimensional

Equação Diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi=0 \qquad \text{(VII)}$$



A equação discretizada para os nós interiores está resumida a seguir:

$$a_P\emptyset_P = a_W\emptyset_W + a_E\emptyset_E + a_S\emptyset_S + a_N\emptyset_N + a_B\emptyset_B + a_T\emptyset_T + S_u$$

Onde:

a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$	$a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$

2. **Problema de Difusão e Convecção**

A equação I aplicada a um problema de convecção e difusão de uma propriedade ϕ, sem fontes pode ser escrita como:

$$div\left(\rho\phi\vec{V}\right) = div(\Gamma\, grad\phi) \quad \text{(VIII)}$$

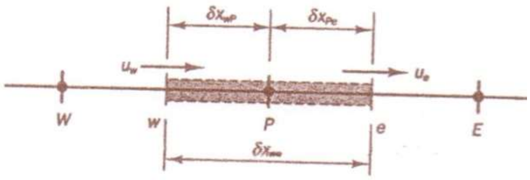
Na condição de escoamento unidimensional:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \quad \text{(IX)}$$

A equação da continuidade também deve ser satisfeita:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad \text{(X)}$$

O $\forall C$ em torno do nó P é dado na figura:



Integrando a equação IX no $\forall C$, resulta:

$$(\rho u A\emptyset)_e - (\rho u A\emptyset)_w = \left(\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad \text{(XI)}$$

Integrando a equação X:

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad \text{(XII)}$$

Para a discretização das equações de convecção-difusão é conveniente a definição de duas variáveis:

$F = \rho u \quad \longrightarrow$ fluxo de massa convectivo por unidade de área

$D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad \longrightarrow$ processo difusivo através das faces.

Os valores dessas variáveis nas células podem ser definidos como:

$$F_w = (\rho u)_w \quad ; \quad F_e = (\rho u)_e \quad \text{(XIIa)}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad ; \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad \text{(XIIb)}$$

Discretizando a equação XI resulta, admitindo-se: $A_e = A_w = A$:

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad \text{(XIII)}$$

Continuidade:

$$F_e - F_w = 0 \qquad \text{(XIV)}$$

Adotando o sistema de aproximação de diferenças centradas para a difusão:

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \qquad \text{(XVa)}$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \qquad \text{(XVb)}$$

Substituindo essas equações na equação XIII:

$$F_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - F_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \qquad \text{(XVI)}$$

Rearranjando os termos:

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

$$ou$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) + (F_e - F_w)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E \qquad \text{(XVI)}$$

$$ou$$

$$a_P\emptyset_P = a_W\emptyset_W + a_E\emptyset_E$$

Sendo:

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

Exercício Proposto

Uma propriedade ϕ é transportada por convecção e difusão através de um domínio unidimensional. As condições de fronteira são:

$$\phi_0 = 1\ para\ x = 0$$

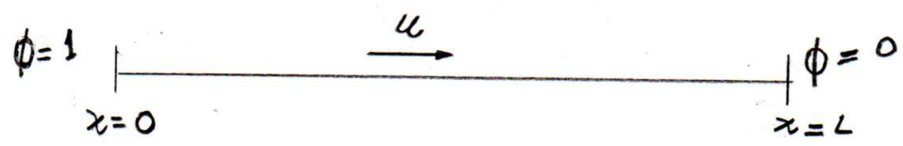
$$\phi_L = 0\ para\ x = L$$

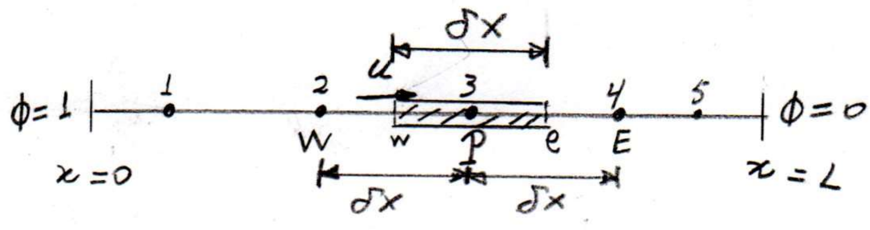
Determinar a distribuição de ϕ como função de x para as seguintes condições:

a) *u = 0,1 m/s e 5 nós; u = 2,5 m/s e 5 nós*
b) *u = 0,1 m/s; 5 nós; u = 0,1 m/s; 20 nós;*
c) *u = 0,1 m/s e 5 nós; u = 2,5 m/s; 10 nós;*
d) *u = 0,1 m/s e 5 nós; u = 2,5 m/s; 20 nós;*
e) *u = 0,1 m/s e 5 nós; 0,5 m/s e 5 nós;*
f) *u = 0,1 m/s e 5 nós; 1,0 m/s e 5 nós;*
g) *u = 0,1 m/s e 5 nós; 1,0 m/s e 10 nós;*
h) *u = 0,1 m/s e 5nós; u = 0,1 m/s e 10 nós;*
i) *u = 0,1 m/s e 5 nós; u = 0,1 m/s e 20 nós.*

Solução Analítica: $\frac{\phi - \emptyset_o}{\emptyset_L - \emptyset_0} = \frac{exp\left(\frac{\rho u x}{\Gamma}\right) - 1}{exp\left(\frac{\rho u L}{\Gamma}\right) - 1}$

Dados: *L = 1 m;* ρ *= 1kg/m*^{3}*;* Γ *= 0,1 kg/m.s;* δ*x = 0,2 m*

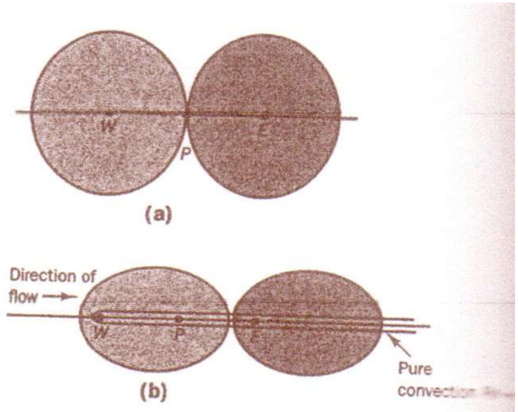




2.1. Conceito de Número de Peclet

O número de Peclet é um número adimensional que mostra o peso relativo entre convecção e difusão de uma propriedade:

$$P_e = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$



(a) pure diffusion: Pe → 0
(b) convection and diffusion
(c) pure convection: Pe → ∞

Referência

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W. (2007) An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method. Pearson Prentice Hall – second edition.