,

Controle H_∞ - Aula 2

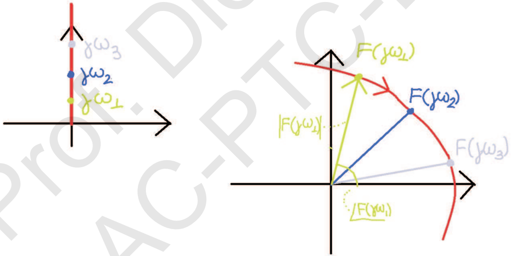
Prof. Diego Colón

22 de setembro de 2020

Conteúdo da Aula

Neste capítulo, apresenta-se como se analisar a estabilidade de um sistema em malha fechada do ponto de vista entrada-saída, que é Critério de Estabilidade de Nyquist. Apresenta-se também como relacionar o gráfico/diagrama de Nyquist à função sensibilidade complementar (malha fechada) para o caso SISO. Apresentam-se também as margens de estabilidade (margens de ganho e de fase) para sistemas SISO e como estas são usadas para medir a robustez de um sistema em malha fechada. Apresenta-se então uma forma mais adequada de se medir robustez, através de uma margem de estabilidade nova a partir da função sensibilidade S de malha fechada. Por fim, pre

- Dada uma função de transferência $F(s)$, se fizermos $s = j\omega$, esta pode ser encarada como uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que descreve uma curva no plano complexo conhecida como *gráfico de Nyquist*.
- $|F(j\omega)|$ é o comprimento do vetor posição, e $\angle F(j\omega)$ o ângulo com o semi-eixo real positivo



Gráficos de Nyquist 2

- Pode-se dividir o gráfico de Nyquist aproximadamente em três regiões: 1) baixas frequências; 2) médias frequências e 3) altas frequências;
- Seja uma função de transferência genérica da forma:

$$F(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^N(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots}, \text{ com } K > 0$$

- O comprimento do vetor $F(j\omega)$ em função de ω é dado por:

$$|F(j\omega)| = \frac{K|1+j\omega T_a||1+j\omega T_b|\cdots}{|\omega|^N|1+j\omega T_1||1+j\omega T_2|\cdots}$$

- O ângulo em função de ω é:

$$\begin{aligned}\angle F(j\omega) = \angle K + \angle(1+j\omega T_a) + \angle(1+j\omega T_b) + \cdots \\ - N90 - \angle(1+\omega T_1) - \angle(1+j\omega T_2) - \cdots \quad (1)\end{aligned}$$

- Para as baixas frequências, isto é $\omega \ll \min(T_1^{-1}, \cdots, T_a^{-1}, \cdots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K}{(j\omega)^N}$$

Ou seja, é o tipo do sistema que determina as características em baixas frequências.

- Para as altas frequências, isto é $\omega \gg \max(T_1^{-1}, \cdots, T_a^{-1}, \cdots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K_a}{(j\omega)^{n-m}}$$

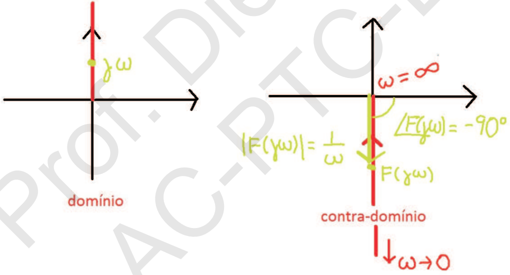
- Se $n > m$, o módulo sempre vai tender à origem, mas $\angle F(j\omega) \simeq -(n-m)\angle(j\omega)$.

- O formato nas médias frequências vai depender da posição relativa de pólos e zeros.

Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

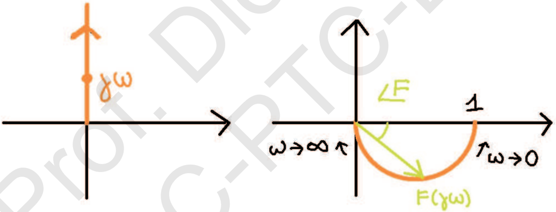
Como $\angle F(j\omega) = -90$ graus e $|F(j\omega)| = 1/|\omega|$:



Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

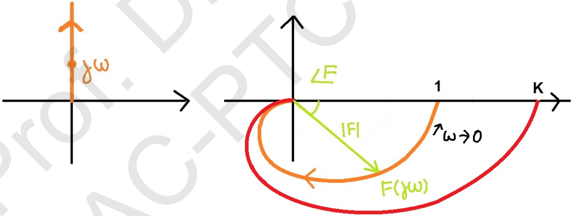
Para $\omega = 0$ temos $F(j0) = 1$. Para $\omega \to \infty$ vemos que o gráfico termina na origem. $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T)$, vemos que a fase varia de 0 a -90 graus. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\sqrt{1 - \omega^2 T^2}$, de modo que ele começa em 1 e vai descrescendo até 0.



Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

Como $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2)$, a fase começa em 0 graus e deve terminar em -180 graus. O módulo começa em 1 para $\omega = 0$ e termina em 0 para $\omega \to \infty$. Se multiplicar por $K > 0$, o novo gráfico de Nyquist fica como a curva em vermelho. A fase nunca é alterada, pois $\angle K = 0$.



Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)}$$

tem-se que $\angle F(j\omega) = -\angle(j\omega) - \angle(1 + j\omega T_2) = -90 - \angle(1 + j\omega T_2)$. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\omega\sqrt{1 - \omega^2 T^2}$, de modo que para $\omega = 0$, tem-se que a fase é -90 graus e o módulo é ∞.

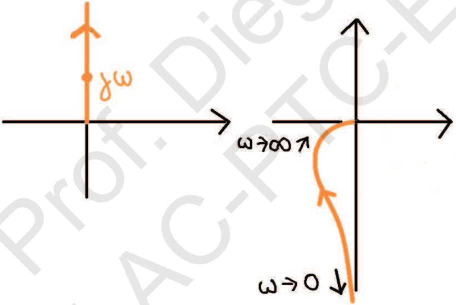
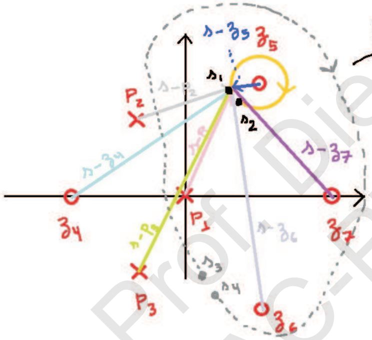
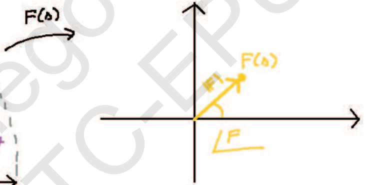


Figura: Diagrama de Nyquist de dois Pólos Reais

Consideremos a função de transferência:

$$F(s) = \frac{(s-z_4)(s-z_5)(s-z_6)(s-z_7)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$





$\angle F = \angle(s-z_4) + \angle(s-z_5) + \angle(s-z_6) + \angle(s-z_7)$
$- \angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_3)$

$\angle F(s_2) - \angle F(s_1) = -360°$

$\angle F(s_4) - \angle F(s_3) = -3.360° + 360° = -720°$

Princípio do Argumento 2

- Se s percorre curva fechada em torno de z_5, partindo do ponto s_1 e terminando em $s_2 \simeq s_1$, todos os vetores terminam no mesmo ângulo que começaram, exceto $(s - z_5)$, que dá uma volta completa de 360 graus no sentido horário, e $\angle F(s_2) - \angle F(s_1) = -360$ graus;
- Se s percorre a circunferência cinza pontilhada, o deslocamento angular é:

$$\angle F(s_4) - \angle F(s_3) = -3 \times 360^\circ + 360^\circ = -720^\circ \qquad (2)$$

  o que corresponde a duas voltas no sentido horário. Note que no interior desta curva temos um polo e três zeros.
- Se a curva cinza fosse deformada para incluir p_2, o vetor $(s - p_2)$ daria também uma volta completa, e o resultado seria -360 graus.

Princípio do Argumento 3

Princípio (do Argumento)

Supondo que a curva fechada no domínio está orientada no sentido horário, o número de voltas no sentido horário que $F(s)$ dá em torno da origem é igual ao número de zeros de $F(s)$ menos o número de pólos de $F(s)$ no interior da curva.

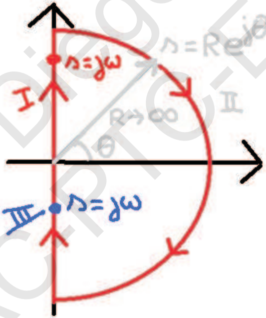
Estabilidade de um sistema em malha fechada: contar pólos de malha fechada (zeros da função $F(s) = 1 + G(s)K(s)$) no semiplano direito. Os polos de $F(s)$ são os pólos de MA.

Corolários

Supondo uma curva fechada no domínio de $F(s)$ que está orientada no sentido horário, o número de voltas que $F(s) = 1 + G(s)K(s)$ dá em torno da origem no sentido horário é igual ao número de pólos de malha fechada menos o número de pólos de malha aberta no interior da curva.

Contorno de Nyquist

É necessário então um contorno que envolva o semiplano direito para se poder usar o princípio do argumento. Este contorno é uma curva fechada que contém o eixo imaginário inteiro (no limite para $R \longrightarrow \infty$, e ainda contém uma semi-circunferência de raio $R \longrightarrow \infty$).



Podemos então reescrever o princípio do argumento da seguinte forma:

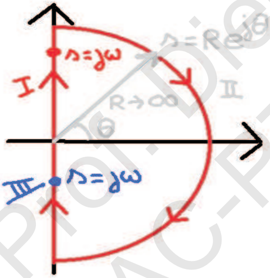
Corolários

Supondo o contorno de Nyquist, o número de voltas que $G(s)K(s)$ *dá em torno de* -1 *no sentido horário (ou seja,* N*) é igual ao número de pólos de malha fechada no SPD (ou seja,* Z*) menos o número de pólos de malha aberta no SPD (ou seja,* P*). Isso pode ser escrito como:*

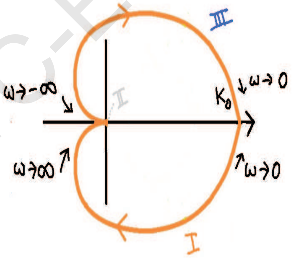
$$Z = N + P$$

Para o caso da função

$$G(s)(Ks) = \frac{K_0}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, \text{ com } K_0, T_1, T_2 > 0 \qquad (3)$$



(a)



(b)

- A primeira parte corresponde à curva I, que é o semi-eixo imaginário positivo. Este diagrama já foi traçado anteriormente.
- A segunda parte do esboço corresponde à região II, que é a semi-circunferência de raio infinito, representada por $s = Re^{j\theta}$.

$$G(Re^{j\theta})K(Re^{j\theta}) = \frac{K_0}{(1 + T_1 Re^{j\theta})(1 + T_2 Re^{j\theta})} \tag{4}$$

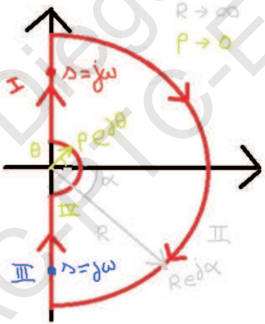
- Para $R \to \infty$, tem-se que $G(Re^{j\theta})K(Re^{j\theta}) = 0$, ou seja, para toda a semi-circunferência de raio infinito, o gráfico de Nyquist permanece na origem.
- Para o caso da região III, como s está no semi-eixo negativo, devido à propriedade que $G(-j\omega)K(-j\omega) = G^*(j\omega)K^*(j\omega)$, então o gráfico de Nyquist é o complexo conjugado do caso da região I, ou seja, simplesmente troca-se o sinal da parte imaginária.

- Nota-se que o ponto -1 não é envolvido nenhuma vez, de modo que $N = 0$.
- Não existe nenhum pólo de malha aberta no semi-plano direito, o que significa que $P = 0$.
- Pelo critério de estabilidade de Nyquist, tem-se que $Z = P + N = 0$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para quaisquer valores de $K_0, T_1, T_2 > 0$.

Para o caso da função de transferência:

$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(1+sT)}, \text{ com } K_0, T > 0 \tag{5}$$

o problema deve sofrer uma modificação, pois o contorno de Nyquist passa exatamente em cima do pólo que está na origem.



Critério de Estabilidade de Nyquist 6

- Nota-se agora que há duas semi-circunferências: uma com raio tende para o infinito $R \to \infty$ e outra cujo raio tende a zero $\rho \to 0^+$.
- A região I já foi obtids anteriormente para esta função de transferência
- Para a região II, ocorre o mesmo que no problema anterior, ou seja, o gráfico de Nyquist permanece parado na origem enquanto o ponto s percorre a circunferêcia de raio infinito.
- Para a região III, devido à simetria par do módulo e ìmpar da fase, o gráfico é a imagem espelhada em relção ao eixo real.

- Para o caso da região IV, temos $s = \rho e^{j\theta}$. Então:

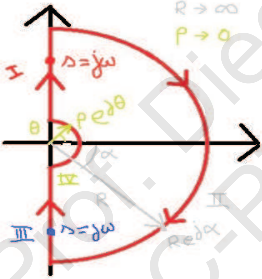
$$G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) = \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}(1 + T_2\rho e^{j\theta})} \tag{6}$$

- Se $\rho \to 0$, o termo $1 + T_2\rho e^{j\theta}$ fica aproximadamente igual a 1. Deste modo, tem-se que:

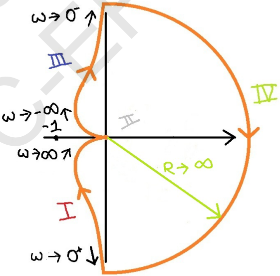
$$G(\rho e^{j\theta})KH(\rho e^{j\theta}) \approx \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}} = \frac{K_0}{\rho}e^{-j\theta}$$

- A fase deste número complexo é $-\theta$ varia de -90 a 90 graus no sentido anti-horário (ponteiro amarelo). Deste modo, $G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) \approx (K_0/\rho)e^{-j\theta}$, que descreve uma semi-circunferência, porém com raio muito grande, e no sentido horário.
- Esta semi-circunferência deve começar no ponto final do trecho III e terminar no ponto inicial do trecho I, preservando o sentido.

Aplicando o critério de estabilidade de Nyquist,temos que $N = 0$ e $P = 0$, de modo que $Z = 0$, ou seja, o sistema é estável em malha fechada para qualquer $K_0 > 0$.



(c)

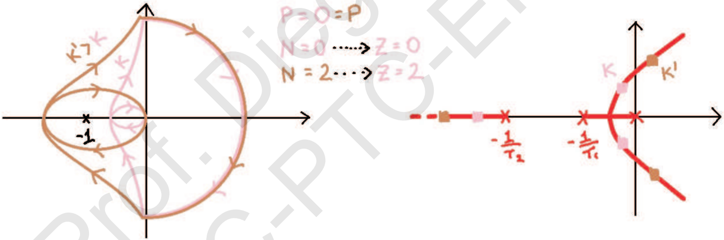


(d)

Critério de Estabilidade de Nyquist 9

Para o caso da função de transferência em malha aberta da forma:

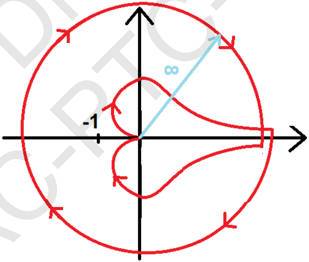
$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



A FT de malha aberta:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s-1)}{s^2(s+2)}$$

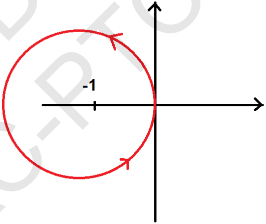
que é de fase não-mínima, pois tem um zero no semiplano direito. Qualquer que seja o valor de K, o sistema em malha fechada será instável. De fato, tem-se que $P = 0$, $N = 1$, logo $Z = P + N = 1$.



A FT de malha aberta:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s+3)}{(s+2)(s-2)}$$

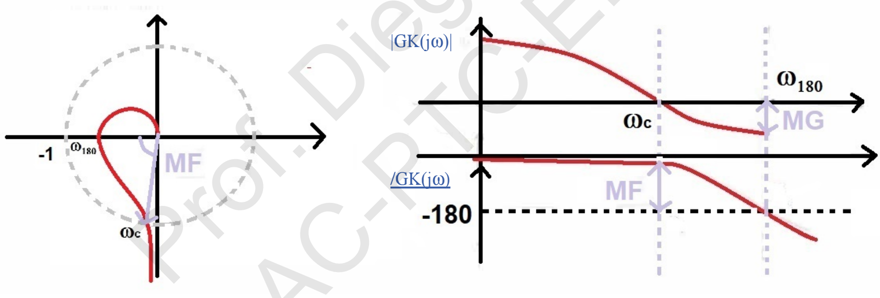
que é uma função de transferência instável. Nota-se que um valor pequeno o suficiente de K fará com que o sistema em malha fechada seja estável. De fato, $P = 1$ e só teremos estabilidade quando $N = 0$ (na figura, tem-se que $N = -1$).



Margens de Estabilidade 1

- Os parâmetros da planta quanto do controlador podem mudar com o tempo: envelhecimento, variações dos parâmetros ambientais (temperatura, pressão,...) dentre outras.
- Estas variações podem transformar um sistema em malha fechada que foi projetado para ser estável, em um sistema instável ao longo do tempo.
- O projetista deve se preocupar, durante o projeto, em garantir que o sistema tenha capacidade de permanecer estável mesmo havendo estas incertezas na planta.
- Tal propriedade de um sistema em malha fechada e conhecida como *robustez de estabilidade*.
- A forma clássica de se medir robustez em malha fechada é através das margem de ganho e margem de fase.

Na figura abaixo, mostra-se como definir os parâmetros *margem de ganho*, *margem de fase* e as frequências de cruzamento de ganho e de fase a partir do diagrama de Nyquist. Estes parâmetros se encontram na região de médias frequências e dão uma boa ideia sobre a robustez do sistema, bem como o seu desempenho nominal, quando a malha for fechada.

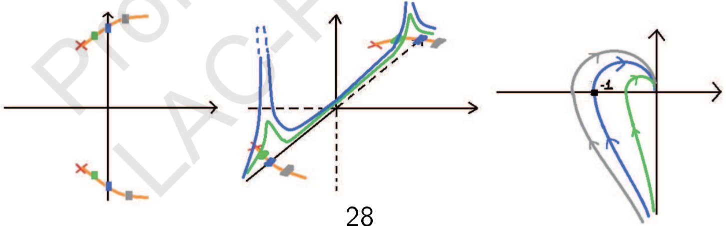


Margens de Estabilidade 3

- A frequência onde o módulo de $G(j\omega)K(j\omega)$ vale exatamente 1 (ou seja, 0 dB), é a chamada *frequência de cruzamento de ganho*, e é representada por ω_c.
- A frequência onde a fase de $G(j\omega)K(j\omega)$ vale exatamente 180° é a chamada *frequência de cruzamento de fase*, e é representada por ω_{180}.
- A *margem de ganho* MG é o valor (em decibéis) de $|G(j\omega_{180})K(j\omega_{180})|$, e indica o quanto o valor do ganho desta função de transferência poderia ser aumentado sem que isso acabasse com a estabilidade do sistema em malha fechada.
- A *margem de fase* MF (ou γ) é dada por $\angle G(j\omega_c)K(j\omega_c) + 180^\circ$, e representa o quanto de atraso $e^{-j\alpha}$ pode ser acrescentado em $G(j\omega)K(j\omega)$ sem que isso cause instabilidade no sistema em malha fechada.

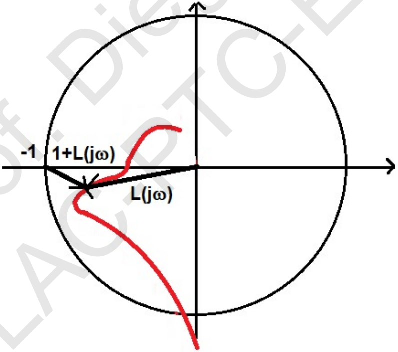
Margens de Estabilidade 4

- A faixa de frequências médias é delimitada aproximadamente por ω_c e ω_{180}, ou seja, é esta faixa de frequências que está relacionada com a estabilidade e a estabilidade relativa (ou robustez de estabilidade) do sistema em malha fechada.
- Quanto mais próximo o gráfico de Nyquist estiver do ponto -1, pior é a robustez de estabilidade do sistema em malha fechada (supondo que é estável).
- A correlação existente entre a posição dos pólos dominantes de malha fechada, o maior pico de ressonância do diagrama de Bode em malha fechada e o diagrama de Nyquist já foi apresentado.



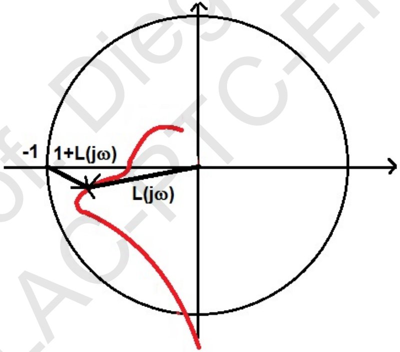
A menor distância entre $-1 + j0$ e o diagrama de Nyquist é resultado da minimização na frequência:

$$ME = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \left(\max_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right)^{-1} = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|} \quad (7)$$



Margens de Estabilidade 6

- De modo geral, no caso SISO, ME é um indicador de robustez de estabilidade mais confiável
- Para o caso MIMO, ela continua tendo a mesma definição, enquanto MG e MF possuem generalizações complexas, como serão vistas mais adiante.



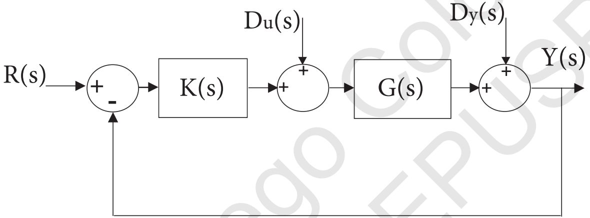
Margens de Estabilidade 7

- MG (margem de ganho), MF (margem de fase) e ME (nova margem de estabilidade) que consideram que não tenho nenhum tipo de informação a mais sobre as incertezas da planta.
- O conceito de *família de plantas*, que representa todas as possibilidades de modelos que uma planta pode ter durante a sua operação será usado mais adiante
- **Planta (sistema) nominal**: será uma planta média nesta família.
- Por enquanto, podemos dizer que estamos somente trabalhando com a planta nominal de um sistema (única que conhecemos)

Estabilidade Interna 1

- O gráfico de Nyquist depende somente dos pólos de $L(s)$ que são *controláveis* e *observáveis*.
- Aqueles que são não-controláveis e/ou não-observáveis cancelam com zeros e não aparecem em $L(s)$
- Não está garantida a estabilidade em MF se houver algum cancelamento de pólo com zero no semiplano direito e interno a $G(s)$, a $K(s)$ ou entre $G(s)$ e $K(s)$.
- Um sistema em MF é *internamente estável* se para uma repreentação em espaço de estados do sistema, a origem do espaço de estados é assintoticamente estável para quaisquer sinais d_u e d_y e r

Estabilidade Interna 2



Se

$$K(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)} \quad , \quad G(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

tem-se que um pólo do controlador cancela com um zero da planta no semiplano direito.

$$L(s) = G(s)K(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)} \frac{s-1}{s+1} = \frac{k}{s}$$

- O diagrama de Nyquist seria o diagrama de k/s, que indicaria que, para qualquer valor de $k > 0$, o sistema em malha fechada seria sempre estável.
- De fato: $S(s) = s/(s+k)$.
- Mas

$$U = -KSD_y = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+k)} D_y$$

ou seja, o sinal de controle diverge, embora não possa ser observado na saída, qualquer que seja D_y

Estabilidade Interna 4

Podemos dizer então que para que o sistema seja internamente estável, é necessário que:

1. Não haja polos internos nem a K nem a G que sejam ocultos e instáveis
2. Não haja cancelmento de pólos de K com zeros de G no semiplano direito (e vice-versa)
3. para $L = GK$, o critério de Nyquist resulte em $Z = 0$.

Estabilidade Interna 5

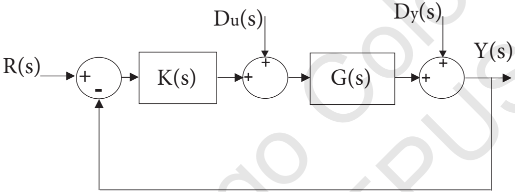
Teorema

Suponha que G e K não tenham polos ocultos e instáveis. Então, o sistema realimentado na Fig. **??** *é internamente instável se e só se as funções de transferência em malha fechada:*

$$(1 + GK)^{-1}, \quad K(1 + GK)^{-1}, \quad G(1 + GK)^{-1}, \quad GK(1 + GK)^{-1}$$

forem todas estáveis

Uma consequência é: se (A_c, B_c, C_c, D_c) é um realização mínima do sistema em malha fechada, então os autovalores de A_c estão no semiplano esquerdo.



Se $G(s)$ for uma planta estável, o teorema acima será satisfeito para $Q(s) = K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1}$ seja estável. Deste modo:

$$GQ = GK(1 + GK)^{-1} = T = 1 - S \rightarrow GQ = 1 - (1 + GK)^{-1}$$

$$1 - GQ = (1 + GK)^{-1} \rightarrow 1 + GK = (1 - GQ)^{-1}$$

$$GK = (1 - GQ)^{-1} - 1 \rightarrow K = Q(1 - GQ)^{-1}$$

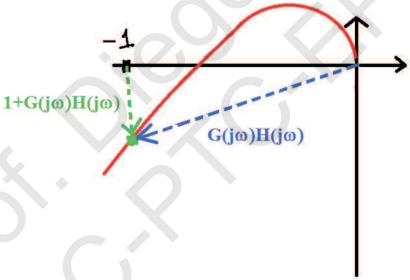
Controladores Estabilizantes 2

Deste modo, se mantivermos Q dentro do conjunto das funções de transferências estáveis (o que garante a estabilidade em malha fechada para plantas estáveis), então todo controlador estabilizante (internamente) seria dado por $K = Q(1 - GQ)^{-1}$. Se pensarmos em $Q(s)$ como pertencente a um espaço de funções de transferência, o controlador seria então parametrizado por pontos neste espaço K_Q. Este espaço de controladores estabilizantes para um dado G pode ser representado por $\mathcal{CE}_G$.
Qualquer controlador dentro deste espaço estabiliza o sistema em malha fechada. Entretanto, quando impomos especificações de desempenho, estamos nos restringindo a um subconjunto menor de controladores.

Neste capítulo, veremos como um sistema de controle em malha fechada pode ser especificado no domínio da frequência, usando-se os diagramas de Bode. Veremos como o gráfico de Nyquist se relaciona com os diagramas de Bode de malha fechada e com os seus principais parâmetros de desempenho. Veremos também como o projeto olhando-se para a função de transferência em malha aberta (loop shaping) pode ser realizado. Por fim, veremos como a norma H_∞, que não será introduzida de forma rigorosa por enquanto, pode ser usada para analisar e especificar desempenho.

- $F(j\omega) = 1 + G(j\omega)K(j\omega)$ é um vetor partindo do ponto -1:

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$$



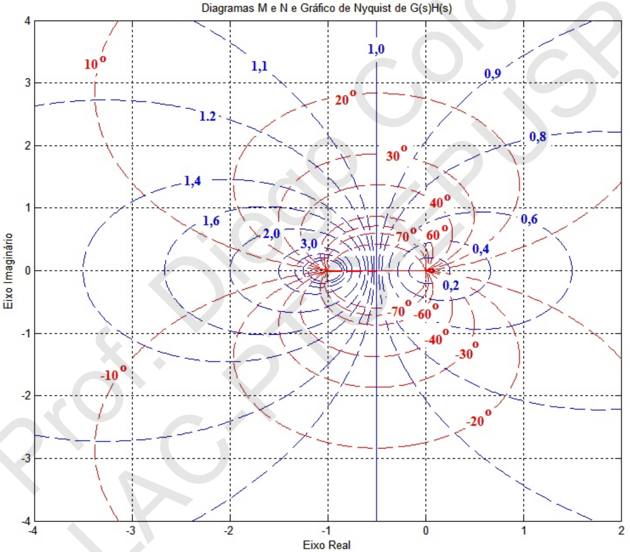
- Gostaríamos de saber quais são os lugares geométricos (LG) de módulo constante e fase constante para malha fechada. P
- Se $GH = X + jY$, pode-se escrever os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OP}$ que são utilizados para formar os lugares geométricos.
- A curva do LG onde o módulo de malha fechada é constante e igual a M é dado por:

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

que após algumas manipulações algébricas, vai resultar em:

$$(X + \frac{M^2}{M^2 - 1})^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

que é uma circunferência.


Diagramas M e N e Gráfico de Nyquist de G(s)H(s)
Eixo Imaginário
Eixo Real
1,0
1,1
1.2
1,4
1,6
2,0
3,0
0,9
0,8
0,6
0,4
0,2
10°
20°
30°
40°
60°
70°
-10°
-20°
-30°
-40°
-60°
-70°

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 4

- Para encontrar as curvas de fase constante, basta tirar a fase de $T(j\omega)$ e igualar a uma constante N arbitrária, o que resulta em:

$$\angle T(j\omega) = \angle(X + jY) - \angle(1 + X + jY) = \alpha$$

onde $N = \tan\alpha$. Usando-se uma conhecida identidade trigonométrica da função tangente, tem-se que:

$$N = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

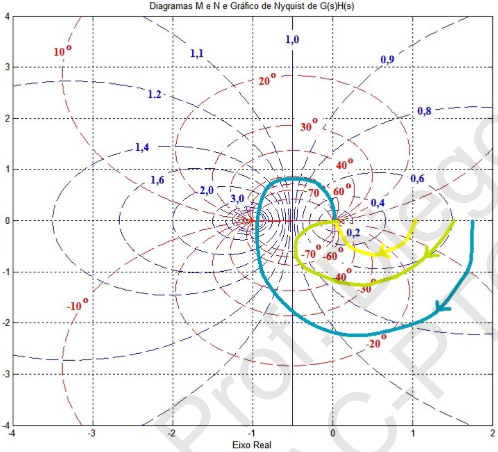
- Manipulando-se adequadamente esta identidade, chega-se a:

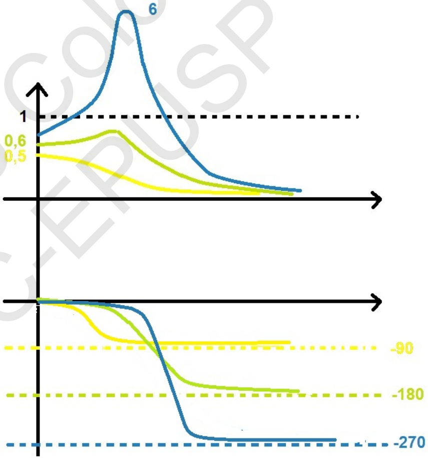
$$(X + \frac{1}{2})^2 + (Y - \frac{1}{2N})^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

que fornece uma circunferência para cada valor diferente de N. Entretanto, como $N = \tan\alpha$, cada vez que α completa uma volta, os valores de N se repetem.

- Na figura estão plotadas, em vermelho, as curvas para α constante, mas não as circunferências inteiras, devido à periodicidade acima citada.
- As curvas correspondentes a $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$ correspondem a trechos circunferências de raio infinito e centradas no infinito.
- O trecho da curva de $\alpha = 180^\circ$ é simplesmente o segmento do eixo real que liga a origem ao ponto -1, que também corresponde a -180°.
- O trecho correspondente a $\alpha = 0^\circ$ é o trecho que liga $-\infty$ a -1 e o trecho que liga 0 a $+\infty$. As curvas que estão plotadas correspondem somente a alguns valores de α entre $\alpha = -180^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$.

- É possível ter-se uma ideia do formato dos diagramas de Bode em malha fechada a partir do diagrama de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$ plotado contra as curvas M e N
- Permite também saber o que as modificações em GK (advindas de mudanças no controlador K) vão causar no sistema, tanto na estabilidade quanto no desempenho.


Diagramas M e N e Gráfico de Nyquist de G(s)H(s)
Eixo Real
1,0
1,1
1.2
1,4
1,6
2,0
3,0
0,9
0,8
0,6
0,4
0,2
10°
20°
30°
40°
60°
70
-70°
-60°
-40°
-30
-20°
-10°


6
1
0,6
0,5
-90
-180
-270