Aula 3. Distribuição Exponencial (Teórica).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Distribuição Exponencial.

X tem distribuição exponencial com taxa $\lambda > 0$ (anotamos como $X \sim \exp(\lambda)$), se a sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A distribuição acumulada é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A média (primeiro momento) é

$$E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Distribuição Exponencial.

Para calcular a variância, calculamos o segundo momento

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx$$
$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Logo obtemos a variância:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribuição Exponencial. Falta de memória. Dizemos que uma variável aleatória X não tem memória se

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todos } s, t \geq 0.$$

Esta propriedade destaca a distribuição exponencial entre outras distribuições. Provamos agora que uma variável aleatória exponencial não tem memória. Observe primeiro, que se $X \sim \exp(\lambda)$, então $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\
\mathbb{P}(X > t) &= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Observe que a propriedade pode escrita de seguinte forma

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t).$$

Distribuição Exponencial. Falta de memória.

Naturalmente, podemos perguntar: existe uma outra distribuição (que não seja a exponencial) que possui a mesma propriedade de falta de memória? A resposta é não. Somente a distribuição exponencial possui esta propriedade. Para mostrar isso, suponha que uma variável X satisfaz propriedade. Seja $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Então, $\bar{F}(x)$ tem que satisfazer

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Ou, tem que satisfazer seguinte equação funcional:

$$g(s+t) = g(s)g(t).$$

Mas, a única solução contínua à direita é:

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$

Por isso,

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \text{ ou } \quad F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

O que significa que X tem distribuição exponencial.

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.1. *A duração de vida de uma lâmpada distribuição exponencial com média igual a 10 meses (ou com a intensidade $\lambda = \frac{1}{10}$). Qual é a probabilidade de que a lâmpada dure mais do que 15 meses? Qual é a probabilidade de que ela dure mais do que 15 meses, se depois de 10 meses, ela ainda está funcionando?*

Seja X o tempo de vida da lâmpada. Então,

$$\mathbb{P}(X > 15) = e^{-15\lambda} = e^{-3/2} \simeq 0.220.$$

Para responder a segunda pergunta, precisamos lembrar que o tempo de vida de lâmpada possua a propriedade de ausência de memória, por isso, sabendo que a lâmpada já durou 10 meses, o resto da vida dela tem distribuição exponencial de novo, com a mesma taxa λ. A pergunta pode ser reformulada da seguinte forma: qual é a probabilidade de que a lâmpada dure mais 5 meses, sabendo que ela já durou 10 meses? Então, em vez de calcular a probabilidade condicional, precisamos calcular a simples probabilidade

$$\mathbb{P}(X > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \simeq 0.604.$$

$\square$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. *Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar uma passagem. A estação tem dois caixas na bilheteria, e ambos estão ocupados. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair dos caixas (existem três pessoas envolvidas, você e as duas pessoas que estão comprando os bilhetes nos caixas)?*

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.2. *Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar uma passagem. A estação tem dois caixas na bilheteria, e ambos estão ocupados. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair dos caixas (existem três pessoas envolvidas, você e as duas pessoas que estão comprando os bilhetes nos caixas)?*

O raciocínio pode ser o seguinte. No momento que um caixa fica livre, seu tempo de compra e o tempo de compra para a outra pessoa que ainda está comprando a passagem, têm distribuições exponenciais, com o mesmo parâmetro (pelo propriedade de falta da memória). Por isso, a probabilidade de que você vai ser o último a sair dos caixas é igual a 1/2. □

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.3. *Como no exemplo 5.1, suponha que o tempo de funcionamento de uma lâmpada elétrica tem distribuiçnao exponencial. Suponha que a média deste tempo é igual a dez horas. Uma pessoa entra em uma sala com luz acesa. A pessoa quer trabalhar na sala durante 5 horas. Qual é a probabilidade de que ela consiga trabalhar durante todo este tempo com a luz acesa? O que podemos dizer sobre esta probabilidade quando a distribuição do tempo de vida de lâmpada não é exponencial?*

Pela falta da memória, a distribuição do tempo de luz acesa é exponencial com a mesma média, cujo valor é de 10 horas. Por isso, a resposta é

$$\mathbb{P}(\text{ resto da vida da lâmpada } > 5) = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2}.$$

Se a distribuição não é exponencial, a probabilidade desejada é

$$\mathbb{P}(\text{tempo de vida } > t + 5 \mid \text{ tempo da vida } > t) = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)},$$

onde t é o tempo de funcionamento da lâmpada antes da pessoa entrar na sala. Por isso, para calcular esta probabilidade junto com a informação sobre a distribuição do tempo de vida da lâmpada, nós vamos precisar saber quanto tempo a lâmpada foi usada. □

Distribuição Exponencial. Taxa de falha.

Seja X uma variável contínua com função de distribuição (distribuição acumulada) F e densidade f. A taxa de falha, denotada por $r(t)$, é definida pela fórmula seguinte:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Para interpretação, vamos supor a variável X é o tempo de funcionamento de um sistema. Suponha que o sistema estava funcionando durante t horas. Queremos saber a probabilidade de que este sistema falhe durante o próximo tempo adicional dt :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in (t, t + dt) \mid X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X \in (t, t + dt), X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X \in (t, t + dt))}{P(X > t)} \simeq \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = r(t)dt.\end{aligned}$$

Distribuição Exponencial. Taxa de falha.

$$\mathbb{P}(X \in (t, t+dt) \mid X > t) \simeq \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = r(t)dt,$$

assim, $r(t)$ representa a taxa (risco) que um item com a "idade" t falhar. Para a distribuição exponencial, lembrando a propriedade de falta de memória, esperamos que a taxa de falha de um sistema com idade t e a taxa de falha de um item "recém-nascido" (de idade 0) deveriam ser os mesmos, então $r(t)$ deve ser constante. Acharemos esta constante:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Distribuição Exponencial. Taxa de falha.

A função de risco $r(t)$ determina unicamente a função de distribuição F. Realmente:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}.$$

Integrando as duas partes de equação, obtemos:

$$\ln(1 - F(t)) = -\int_0^t r(s)ds + C \to 1 - F(t) = e^C \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}.$$

Para $t = 0$, acharemos que a constante $C = 0$. Assim,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}.$$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.4. *Suponha que numa caixa tem* n *diferentes tipos de pilhas com respectivas proporções* $p_j, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$*. Seja* X_j *o tempo de funcionamento da pilha do tipo* j*, supomos que tempo* X_j *é exponencial com média* $\frac{1}{\lambda_j}$*. Escolhemos ao acaso uma pilha da caixa. Qual é a distribuição do tempo de funcionamento da pilha escolhida?*

Seja N tipo de pilha escolhida, $P\{N = j\} = p_j, j = 1, \ldots, n$, $f_j(t)$ a densidade do tempo de vida da pilha do tipo j, e X_N o tempo de funcionamento da pilha escolhida. Obtemos *hiper-exponencial*

$$f(t) = f_N(t) = \sum_{j=1}^{n} f_N(t|N = j)p_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)p_j = \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}.$$

Com função de falha

$$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds = \sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t} \Longrightarrow r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t}}.$$

Distribuição Exponencial. Exemplo 5.4. *Suponha que numa caixa tem n diferentes tipos de pilhas com respectivas proporções $p_j, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Seja X_j o tempo de funcionamento da pilha do tipo j, supomos que tempo X_j é exponencial com média $\frac{1}{\lambda_j}$. Escolhemos ao acaso uma pilha da caixa. Qual é a distribuição do tempo de funcionamento da pilha escolhida?*

Observe, que se tempo de funcionamento é grande, provavelmente é tempo exponencial com menos λ e taxa de falha deve ser constante. Realmente, supomos $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t}} = \frac{p_1\lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \lambda_j e^{-(\lambda_j - \lambda_1)t}}{p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j e^{-(\lambda_j - \lambda_1)t}} \to \lambda_1.$$

Capítulo 5.2.3. Provamos pela indução que a soma de n exponenciais (com mesma taxa λ) independentes tem densidade $f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ (gamma distribuição com parâmetros n e λ, $\gamma(n,\lambda)$). Para $n=1$ é óbvio. Provamos a fórmula para $n+1$:

$$f_{n+1}(t) = f_{X_1+\cdots+X_n+X_{n+1}}(t) = \int_0^\infty f_{X_{n+1}}(t-s) f_{X_1+\cdots+X_n}(s)ds$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$\square$

Capítulo 5.2.3. Outro calculo que vamos explorar com frequência: *sejam X_1 e X_2 duas exponenciais independentes com as taxas λ_1 e λ_2, respectivamente, calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 < X_2 \mid X_1 = x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(x < X_2)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 5.2.3. Exemplo 5.5. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. exponenciais com taxas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Achar a distribuição de v.a. X*

$$X := \min(X_1, \dots, X_n).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \\
&= \exp\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) t \right\}.
\end{aligned}$$

$\square$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.