

AULA 4 - MECÂNICA

14/09

QUARTA NÃO TEREMOS AULA
SÍNCRONA!!

Vou POSTAR AULA OFFLINE.

- MONITORIA NESTA MESMA SALA.
SEXTAS DAS 14 ÀS 15.

PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA P/
SISTEMAS FECHADOS.

$\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)$ INVARIANTE
POR
TRANSFORMAÇÕES

GALILEANAS.

$X \in \mathbb{R}^{3n}$

- F NÃO PODE DEPENDER DE t .
- F DEPENDE APENAS DE $X_i - X_j$ E NÃO DE X_i
- F " " DE $\dot{X}_i - \dot{X}_j$ E NÃO DE $\dot{X}_i$

(1)

EXEMPLOS DE SISTEMAS MÉCANICOS.

(2)

(NÃO NECESSARIAMENTE FECHADOS).

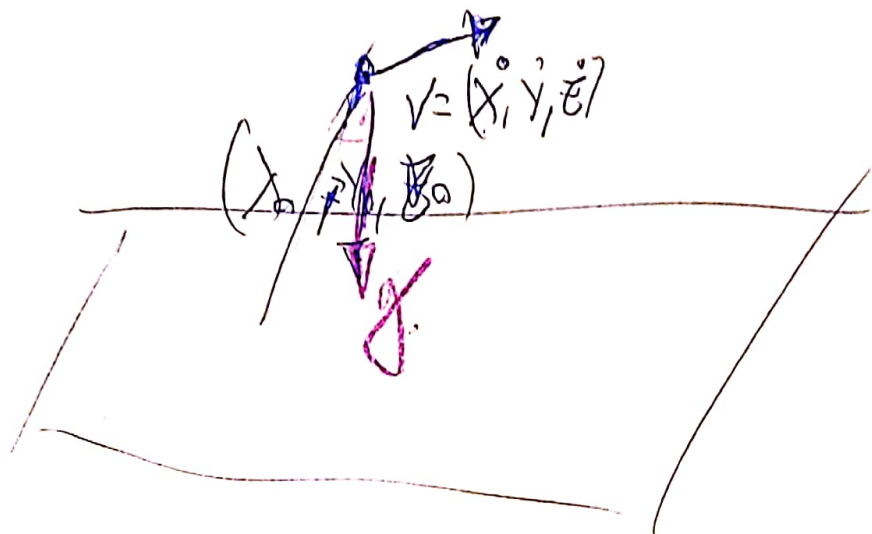
1º PEDRA EM QUEDA PERTO DA SUPERFÍCIE DA
TERRA.

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

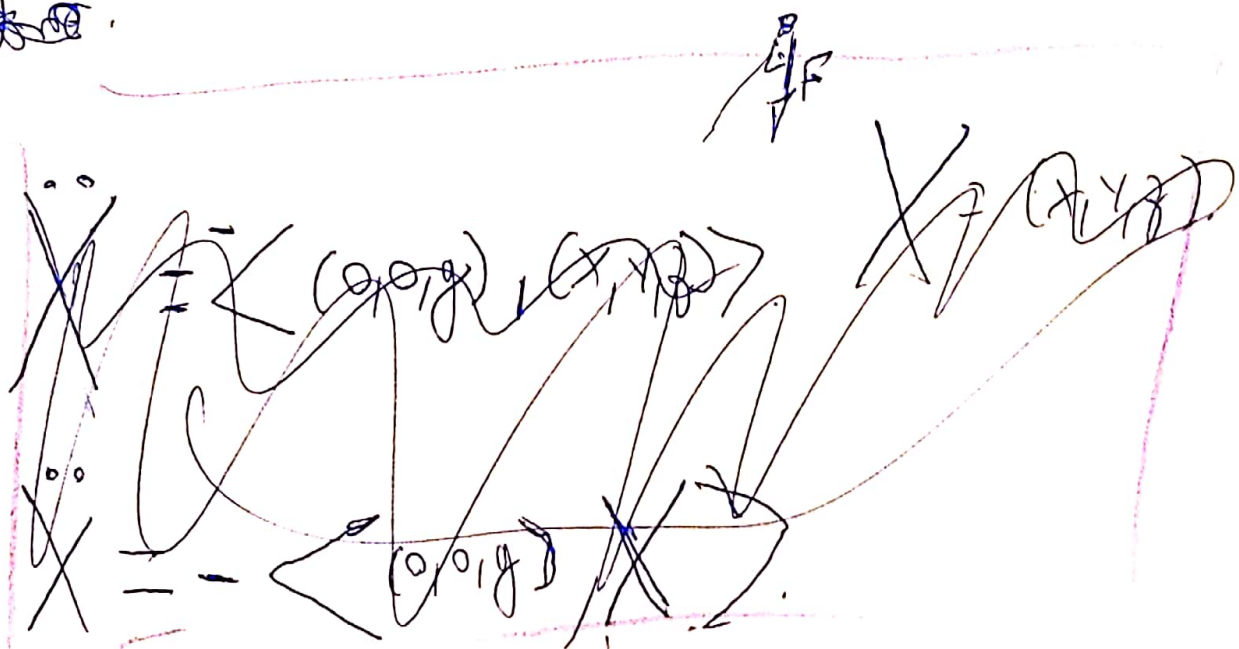
$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = -g$$



~~Exemplo.~~



$$\ddot{X} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

(3)

ASSOCIAR A FUNÇÃO:

$$X = (x, y, z)$$

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

DA DA POR.

$$U(X) = \langle (0, 0, g) | X \rangle$$

$$= g \cdot z \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{ENERGIA} \\ \text{POTENCIAL} \end{matrix}$$

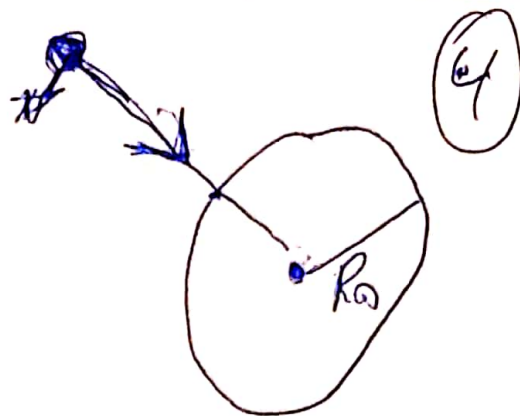
EQUAÇÃO DO SISTEMA FICA:

$$\ddot{X} = - \nabla U$$

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 2.

$$\ddot{X} = - \frac{g \cdot R_0^2}{\|X\|^2} \cdot \left(\frac{X}{\|X\|} \right)$$



$$X \in \mathbb{R}^3$$

TAMBÉM PODE SER ESCRITA como.

P/ ALGUMA FUNÇÃO

$$\ddot{X} = - \nabla U(X)$$

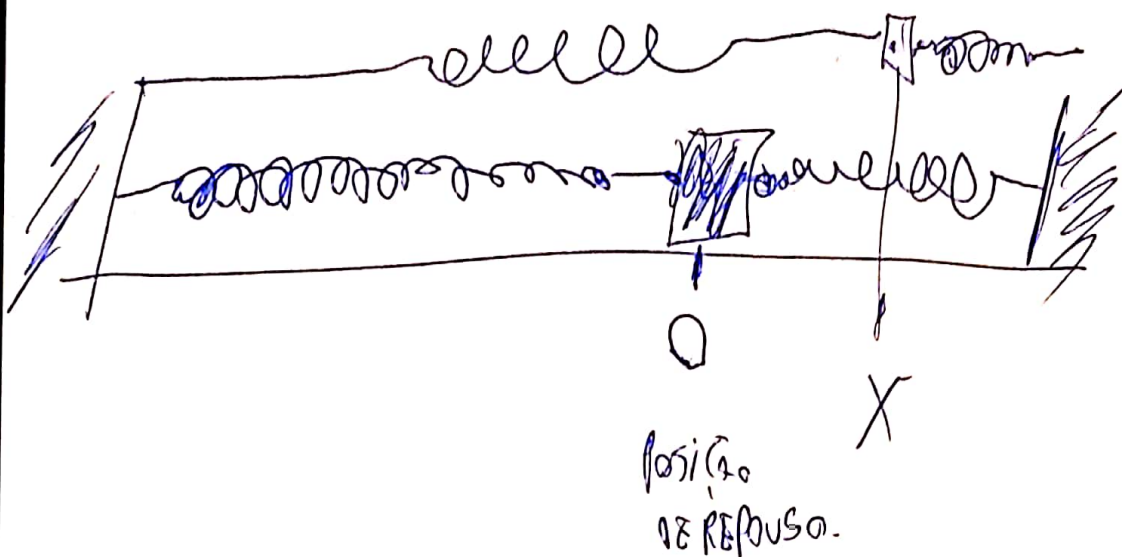
$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(X) = -g \frac{R_0^2}{\|X\|}$$

$$U(\theta, \phi, r) = -g \frac{R_0^2}{r}$$

5

Mal A.



$$\ddot{X} = -\alpha^2 X$$

$$X \in \mathbb{R}$$

SE TRACARMOS O OBJETO A ACELERAÇÃO CONTÍNUA PROPORCIONAL AO DESLOCAMENTO, MAS A CONSTATANTE DE PROPORTIONALIDADE MUDA.

$$m\ddot{X} = -\alpha^2 X$$

$$m\ddot{X} = -\frac{dV}{dX}$$

$$V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(x) = \frac{\alpha^2}{2} X^2$$

α é um número real.

SISTEMAS CONSERVATIVOS. (6)

SISTEMAS DO TIPO:

$$X \in \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cdots \times \mathbb{R}^3}_n = \mathbb{R}^{3n} = \mathbb{R}^N.$$

n pontos em $\mathbb{R}^3$.

n massas $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$U: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ DE CLASSE C^2

MAIS PRECISAMENTE
 $U: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$
 Ω É ABERTO

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$X_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3})$$

NO TÃO

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

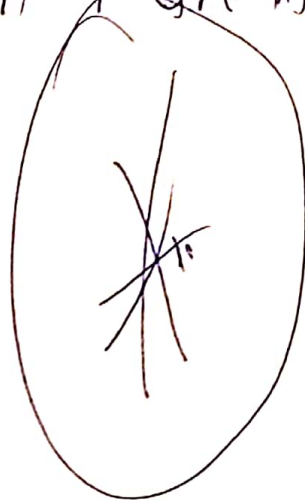
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_{i1}} \\ \frac{\partial U}{\partial x_{i2}} \\ \frac{\partial U}{\partial x_{i3}} \end{pmatrix} \in$$

(7)

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^3.$$

SISTEMA É DA FORMA:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

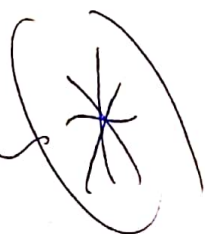


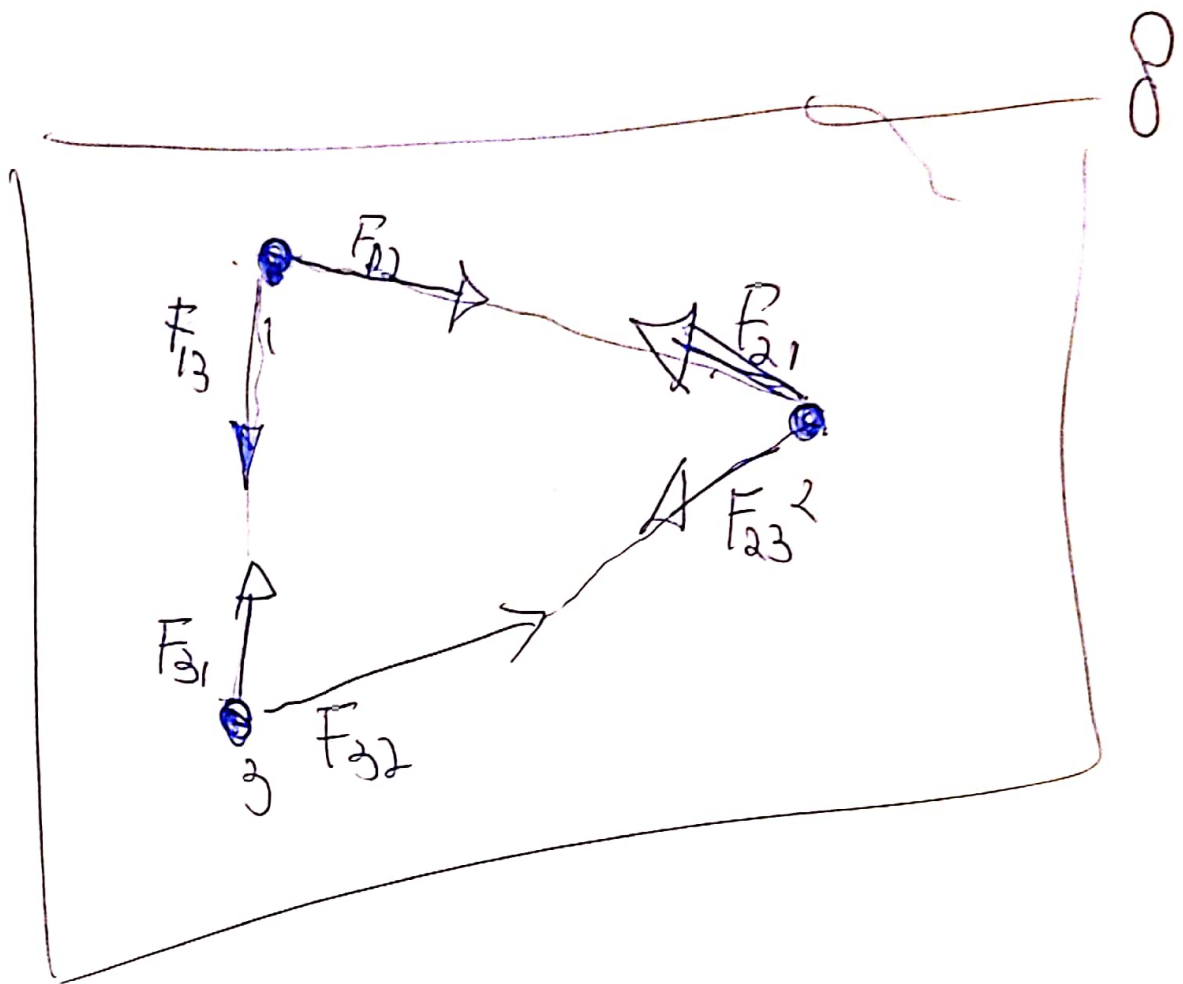
PROBLEMA DOS 3 CORPOS.

$$U: (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^9 \setminus F \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$K > 0$ CONSTANTE.

$$U(x_1, x_2, x_3) = K \left(- \frac{m_1 m_2}{\|x_1 - x_2\|} - \frac{m_1 m_3}{\|x_1 - x_3\|} - \frac{m_2 m_3}{\|x_2 - x_3\|} \right).$$





$$m_1 \ddot{X}_1 = (F_{13} + F_{12}) = \frac{m_1 m_2 K}{\|x_1 - x_2\|^2} \frac{(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} - \frac{m_1 m_3 K}{\|x_1 - x_3\|^2} \frac{(x_1 - x_3)}{\|x_1 - x_3\|}$$

$$F_{13} = -F_{31}$$

EXERCÍCIO!

(9)

Mostre que o sistema (*)
é invariante por transformações
Galileanas.

Sistemas Conservativos
Gerais tem uma integral
primeira.

EM E.D.O.

~~Do~~

$$(a) \quad Y' = G(Y, t). \quad G: \Omega' \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$$

ABERTO

Ω' ABERTO
DE $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Dizemos que uma função
 $H: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$

É UMA INTEGRAL PRIMEIRA.
DO SISTEMA SE.

(10)

(1) H NÃO É CONSTANTE EM NENHUM ^{sub}ABERTO DE Ω .

(2) SE $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ É UMA SOLUÇÃO DE (a) ENTÃO $h \circ \psi$ É CONSTANTE.

EM SISTEMAS CONSERVATIVOS

PODEMOS DEFINIR:

$$T(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \quad \text{ENERGIA CINÉTICA.}$$

$U(x)$ ENERGIA POTENCIAL

$$\bar{E}(x, \dot{x}) = T + U$$

TEOREMA: E É CONSTANTE SOBRE AS SOLUÇÕES.

DEM:

(11)

TEMOS QUE:

$$m_i \ddot{X}_i = - \frac{\partial U}{\partial X_i} \quad 1 \leq i \leq n.$$

SEJA $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solu. (A.O.).

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n).$$

SEJA

$$h(x) = E(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)) = T(\dot{X}) + U(X).$$

CALCULE MOS

$$h'(x) = \left\langle \frac{\partial E}{\partial \dot{X}}, \dot{\varphi}(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial E}{\partial X}, \ddot{\varphi}(x) \right\rangle.$$

$$h'(x) = \langle \nabla U(x), \dot{\varphi}(x) \rangle + \langle \nabla T, \ddot{\varphi}(x) \rangle.$$

$$h'(x) = \langle \nabla U, \dot{\varphi}(x) \rangle + \sum m_i \dot{x}_i$$

$$\nabla T = m_i \dot{x}_i (m_1 \dot{x}_1, m_2 \dot{x}_2, \dots, m_n \dot{x}_n)$$

INTERLÚDIO.

(12)

SISTEMA DA MALA. (b)

$$m\ddot{X} = -a^2 X$$

$$T(\dot{X}) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$$
$$V(X) = \frac{a^2 X^2}{2}$$

$$m\ddot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X}$$

$$E(X, \dot{X}) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{a^2 X^2}{2}$$

$\varphi(t)$ solução de b.

$$h(t) = E(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 + \frac{a^2 \varphi^2}{2}$$

$$h'(t) = \left(\frac{\partial E}{\partial X} \right) (\varphi, \dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} + \frac{\partial E}{\partial \dot{X}} (\varphi, \dot{\varphi}) \cdot \ddot{\varphi} =$$

$$= aX \cdot \dot{\varphi} + m\dot{X} \cdot \ddot{\varphi} =$$

$$= a\varphi \cdot \dot{\varphi} + \boxed{m\varphi \cdot \ddot{\varphi}} = a\varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cdot (-a\varphi) =$$
$$= 0.$$

$$h^1(x) = \langle \nabla U, \dot{\phi} \rangle + \langle \nabla T, \dot{\phi} \rangle = \quad (13)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \dot{\phi}_i + \cancel{\sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \cdot \dot{\phi}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\phi}_i \cdot \dot{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} (\psi_i, \dot{\phi}) \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} (\psi_i, \dot{\phi}) \cdot \dot{\phi}_i = 0.$$

EXEMPLO: E APLICAÇÃO

ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DE UM

corpo G_0

(14)

$$\ddot{X} = -g R_0^2 \frac{X}{\|X\|^3} \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

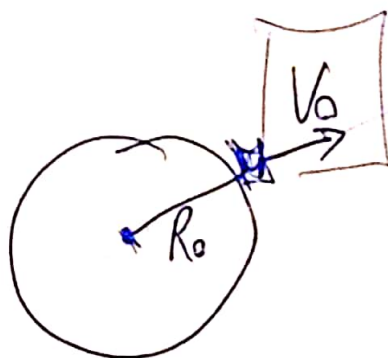
$$m_1 = 1.$$

$$U: \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$U(X) = -g \frac{R_0^2}{\|X\|}.$$

$$T = \frac{1}{2} \|\dot{X}\|^2.$$

$$E(X, \dot{X}) = \left[\frac{1}{2} \|\dot{X}\|^2 \right] - g \frac{R_0^2}{\|X\|}$$



NUMA SOLUÇÃO

(15)

$\varphi(x)$ TAL QUE $\|\varphi(a)\| = R_0$.

(COMEÇOU NA SUPERFÍCIE).

SE TEMOS QUE $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| = +\infty$.

E SE $h(x) = E \circ \varphi$ ~~EM~~ COM h É
CONSTANTE NA SOLUÇÃO.

$$h_0 = h(x) \geq U(\varphi(x)) = -g \frac{R_0^2}{\|\varphi(x)\|}.$$

TEMOS QUE $\frac{h_0}{h_0} = h(x) \geq 0$.

EM PARTICULAR:

$$h(0) = \frac{1}{2} \|\dot{\varphi}(0)\|^2 - g \frac{R_0^2}{\|\varphi(0)\|} =$$

$$= \frac{1}{2} \|\dot{\varphi}(0)\|^2 - g \frac{R_0^2}{R_0} = \frac{1}{2} \|\dot{\varphi}(0)\|^2 - g R_0.$$

$$\geq 0 \Rightarrow \|\dot{\varphi}(0)\|^2 \geq 2 \cdot g \cdot R_0.$$

SISTEMAS COM 1 GRAU DE LIBERDADE (1G)
E QUAÇÃO DO TIPO:

~~Def~~ $\ddot{X} = f(X, \dot{X})$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f \in C^1$$

Podemos definir

$$U(X) = - \int_0^X f(s) ds.$$

✓ ENERGIA
POTENCIAL

$$\rightarrow \ddot{X} = - \frac{\partial U}{\partial X}.$$

NESTE CASO A ANÁLISE DO "ESPAÇO
DE FASE"
COSTUMA SER MUITO ÚTIL.