

SISTEMAS CONSERVATIVOS.

SISTEMA MECÂNICO DO TIPO.

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{3n} \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

SISTEMA DO TIPO $m \in \mathbb{R}_+$ $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$

~~m~~

$$m_i > 0$$

SISTEMA.

(1)

$$m_i \ddot{X}_i = - \frac{\partial U}{\partial X_i}$$

SISTEMA DE
ENDOS DE
2ª ORDEM

$$U: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS:

PROPOSIÇÃO: SE $\varphi(x)$ É UMA SOLUÇÃO DE (1)

$$\bar{E}(X, \dot{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{X}_i^2}{2} + U(X)$$

ENERGIA

ENTÃO A FUNÇÃO

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$h(x) = E(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)) \text{ É CONSTANTE.}$$

DEM:

$$\frac{d}{dx} h = \frac{d}{dx} (E(\varphi(x), \dot{\varphi}(x))) =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} \frac{d\varphi_i}{dx} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} \frac{d\dot{\varphi}_i}{dx} =$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{\varphi}_i + m_i \dot{\varphi}_i \ddot{\varphi}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(-m_i \ddot{\varphi}_i(x) \dot{\varphi}_i + m_i \dot{\varphi}_i \ddot{\varphi}_i \right) = 0$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS:
QUAIS SÃO OS PONTOS DE EQUILÍBRIO?

$$\dot{X}_i = Y_i$$
$$m_i \dot{Y}_i = - \frac{\partial U}{\partial X_i} = F_i$$

$$\dot{Y}_i = \ddot{X}_i$$

PARA TERMOS PONTOS DE EQUILÍBRIO:
PRECISAMOS QUE

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{Y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall i$$

QUE É IGUAL A

$$\begin{pmatrix} Y_i \\ -\frac{\partial U}{\partial X_i} \cdot \frac{1}{m_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(X_0, Y_0)$$

PTO. É DE EQUILÍBRIO
SE $1^o \nabla > 0$

$$2^o \frac{\partial^2 U}{\partial X_i^2}(X) > 0.$$

(4)

$(\bar{x}, \bar{y})$ É ponto de EQUILÍBRIO SE, E SÓ SE.

$\bar{y} = 0$ E $\bar{x}$ É ponto CRÍTICO DE V :

$$\boxed{\nabla U(\bar{x}) = 0}$$



ESTABILIDADE DE LIAPUNOV.

⊙ SISTEMA DE E.D.O.s $F: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$

② $Y' = F(Y, t)$

$F \in C^1$

E VAMOS ASSUMIR

QUE, $V(Y_0, t_0)$, A SOLUÇÃO DE (2)

COM CONDIÇÃO INICIAL $Y(t_0) = Y_0$

ESTÁ DEFINIDA P/ TODO $t \in \mathbb{R}$.

UMA SOLUÇÃO DE (2)
 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ É DITA ESTÁVEL
 SEGUNDO LIAPUNOV SE:

(5)

$\forall \tau_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ TAL QUE,

SE $\varphi(t)$ É SOLUÇÃO DE (2) E

$$\|\varphi(\tau_0) - \phi(\tau_0)\| < \delta \Rightarrow$$

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq \tau_0.$$

EXEMPLO 1 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{x' = -x}$$

SOLUÇÃO $x(t) \equiv 0$.

SE TOMARMOS

$y(t)$ TAL QUE

$$\|y(0)\| < \epsilon.$$

$$\text{ENTÃO } \|y(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

PODEMOS TOMAR $\delta = \epsilon$.

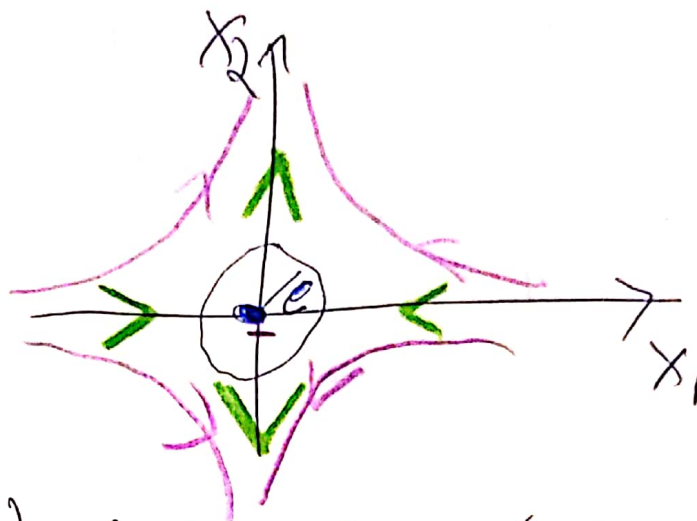
EXEMPLO 2.

(6)

~~$X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$~~ $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$x_1' = -x_1$$

$$x_2' = x_2$$



pto EQUILÍBRIO $(x_1, x_2) = (0, 0)$ É INSTÁVEL.
 pois, $\forall \delta > 0$, SE

$y_0 = (0, \delta)$ A SOLUÇÃO $\psi(t)$ QUE VALER

$(0, \delta)$ EM $t=0$ É $\psi(t) = (0, \delta e^t)$.

É LOBO, SE t SUFICIENTE/É GRANDE,

TEMOS QUE $\|\psi(t)\| = \|\psi(t) - (0, 0)\|$

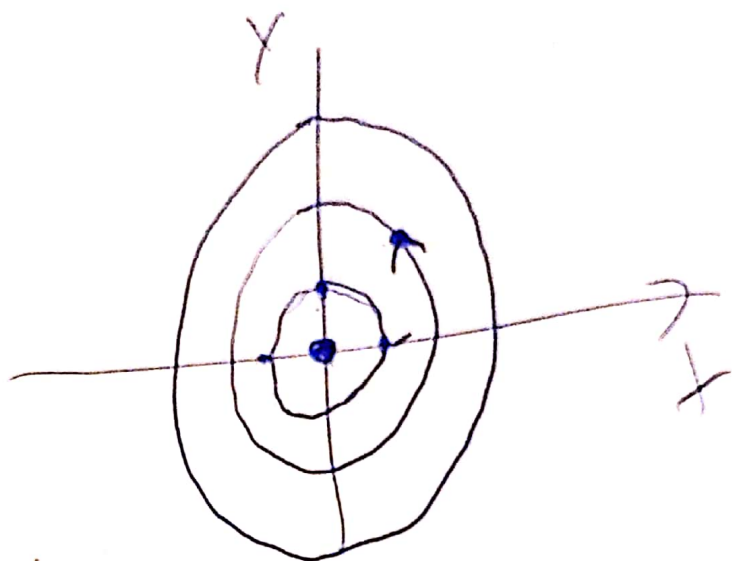
$$\delta e^t > \epsilon.$$

~~SOL~~ EXEMPLO 3.

EM COORDENADAS POLARES.

$$\dot{R} = 0$$

$$\dot{\Theta} = R.$$



DUAS SOLUÇÕES A CONSIDERAR:

1ª TOMO A SOLUÇÃO QUE, EM $\Theta=0$, ESTÁ EM $(0,0)$.
ESTA É ESTÁVEL.

MAS TODAS AS OUTRAS NÃO SÃO.

EXERCÍCIO: TENTEM REDIGIR COM ALGUM
CUIDADO

~~SOL~~ EQUILÍBRIO DE SISTEMAS
CONSERVATIVOS.

(2)

$$\left(\begin{array}{l} \dot{X}_i = Y_i \\ \dot{Y}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial X_i} \end{array} \right)$$

VAMOS TENTAR ANALIZAR ESTABILIDADE
DE PONTOS DE EQUILÍBRIO.

SABEMOS QUE EQUILÍBRIOS SÃO DA

FORMA $(\bar{X}, \bar{Y}) = (\bar{X}, 0)$ ONDE $\nabla U(\bar{X}) = \vec{0}$.

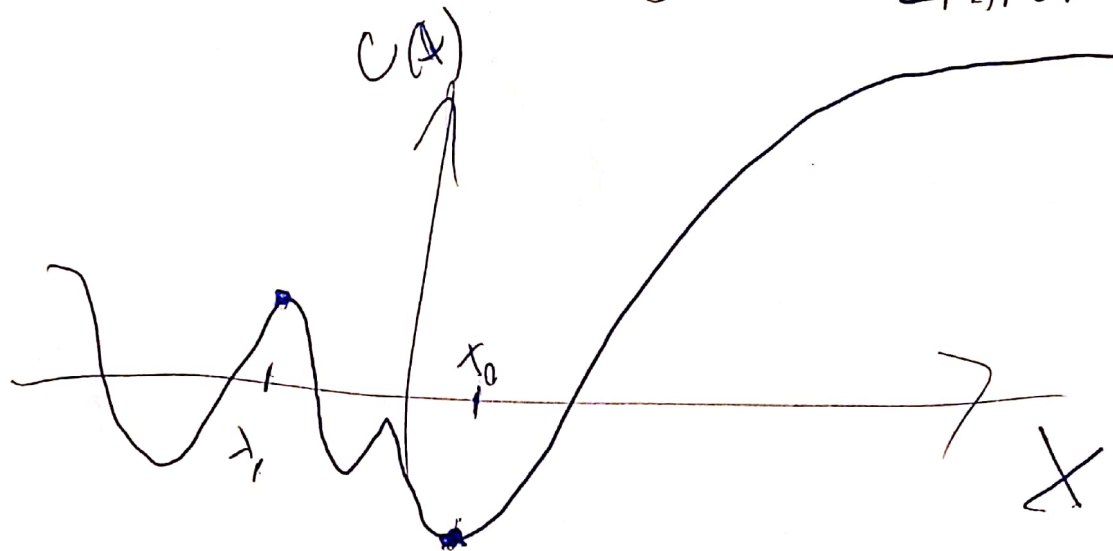
POR EXEMPLO, QUANDO

$\bar{X}$ É PONTO DE MÍNIMO OU PONTO DE
MÁXIMO DE U .

TEOREMA (DIRICHLET-LAGRANGE)

SE

$\bar{x}$ É UM PONTO DE MÍNIMO ESTRITO LOCAL DE U , ENTÃO $(\bar{x}, 0)$ É UM PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL SEGUNDO LIAPUNOV.



$\bar{x}$ É MÍNIMO ESTRITO LOCAL SE, EXISTE $\epsilon > 0$ TAL QUE, SE $\|y - \bar{x}\| < \epsilon$ E $y \neq \bar{x}$, ENTÃO $U(y) > U(\bar{x})$.

(10)

DE MONSTRAÇÃO:

Como $\bar{x}$ é ponto de mínimo local estrito,
 existe $\epsilon > 0$ tal que se $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon$.

$$\text{e } U(x) \leq U(\bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x}.$$

por outro lado,

$$\text{como } T(\dot{x}) = \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{x}_i\|^2.$$

$$\text{Temos que } T(\dot{x}) \geq 0 \text{ e } T(\dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0.$$

portanto, temos que,

$$\text{se } \|x - \bar{x}\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon \text{ e}$$

$$(x, \dot{x}) \neq (\bar{x}, 0), \quad \epsilon(x, \dot{x}) > \epsilon(\bar{x}, 0).$$



$$E = T(X) + U(X)$$

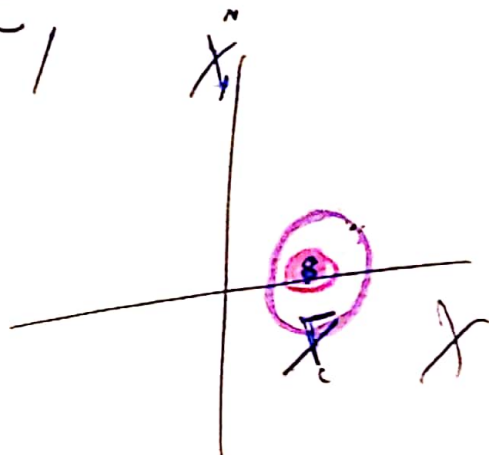
(11)

Logo ~~$E(X, X)$~~
 É PARTICULAR

E É UMA FUNÇÃO
 CONTÍNUA.

Logo SE $\|(X, X) - (\bar{X}, 0)\| \leq \epsilon$,
 $E(X, X) > E(\bar{X}, 0) = E_0$.

Tomando $E_1 = \min_{\|(X, X) - (\bar{X}, 0)\| = \epsilon} E(X, X) > E_0$.



MAS como E É CONTÍNUA, EXISTE $\delta > 0$.

TAL QUE SE $\|(X, X) - (\bar{X}, 0)\| < \delta$

ENTÃO $|E(X, X) - E(\bar{X}, 0)| < \frac{E_1 - E_0}{2}$.

PORTANTO:

E_0

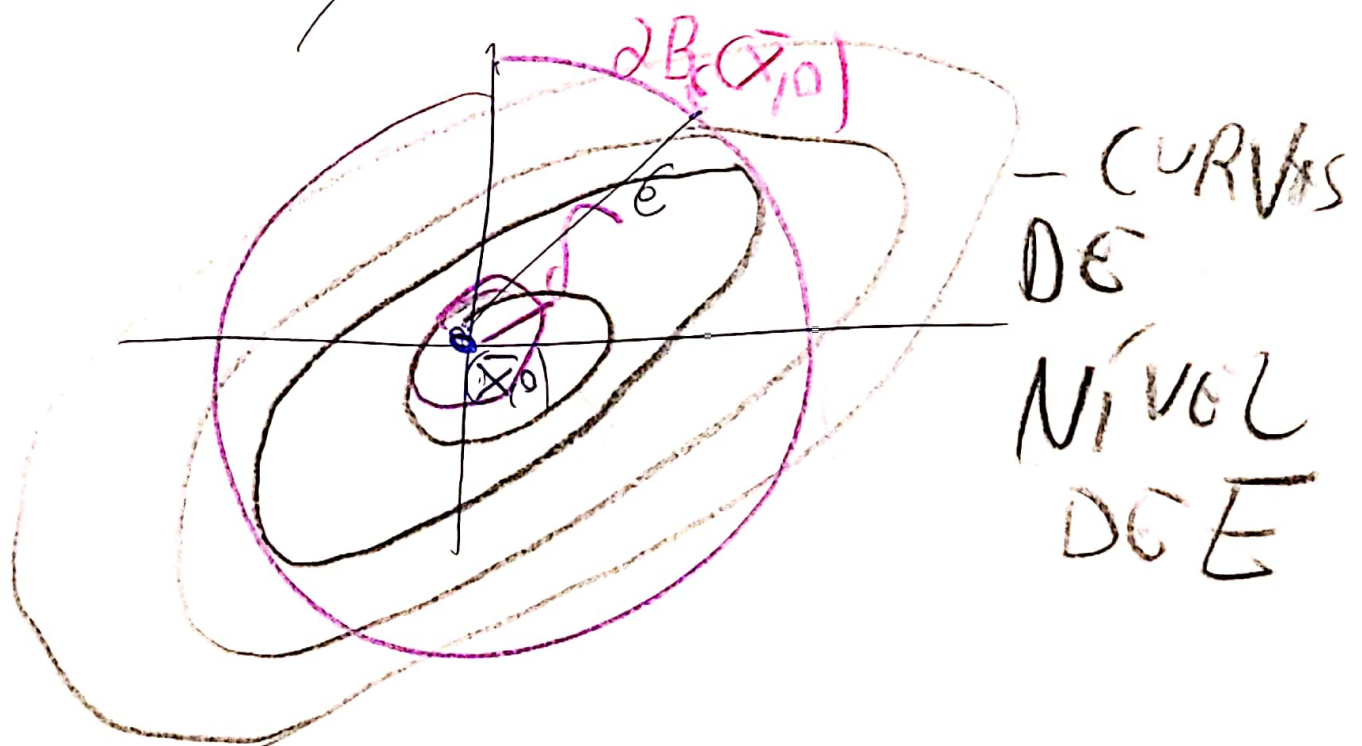
$\forall (x, \dot{x})$ TAL QUE $\|(x, \dot{x}) - (\bar{x}, 0)\| < \delta$ (12)

A ENERGIA DA SOLUÇÃO QUE EM TEMPO 0 ESTÁ EM $(x, \dot{x})$ É MENOR QUE E_1 , ENTÃO SE

φ É ESTA SOLUÇÃO, ENTÃO NÃO PODÊMOS TER.

QUE $\|\varphi(t) - (\bar{x}, 0)\| \geq \epsilon$ $\forall t \neq 0$.

$\Rightarrow \|\varphi(t) - (\bar{x}, 0)\| < \epsilon \quad \forall t.$



(13)

PERGUNTA: SE $\bar{x}$ NÃO É PONTO DE MÍNIMO ESTRITO? É INSTÁVEL?

RESPOSTA: DE PÊNDE:

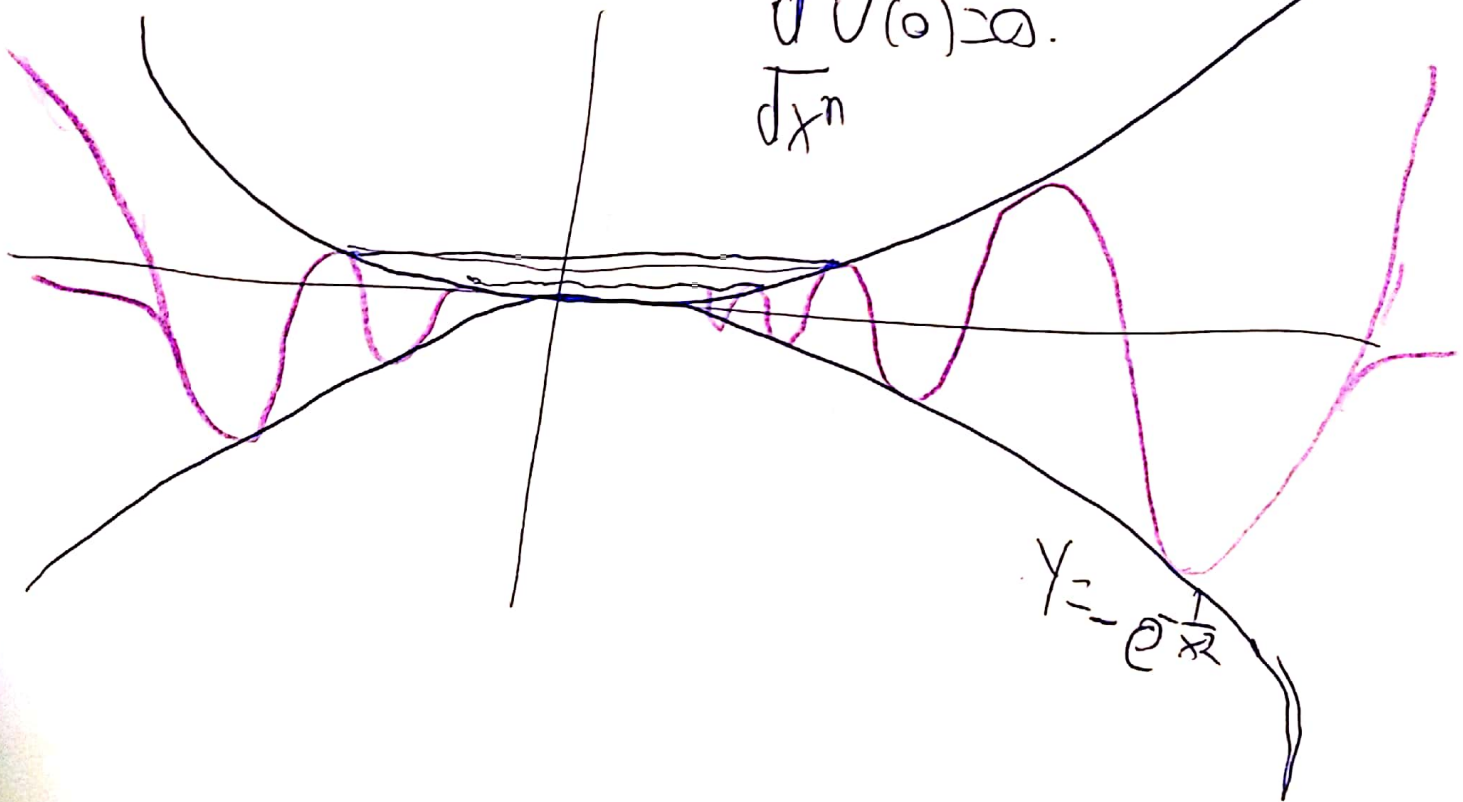
EXEMPLO:

$$U(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$U \in C^\infty$ (EXERCÍCIO).

$$\frac{d^n U(0)}{dx^n} = 0.$$

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$



EM SISTEMAS C/ 1 GRAU DE LIBERDADE? (14)
TEMOS!

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -U'(x) \end{pmatrix}$$

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\ddot{x} = f(x)$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} = -U'(x)$$

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(s) ds$$

EM PARTICULAR, A QUANTIDADE.

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) \text{ É CONSTANTE SOBRE AS SOLUÇÕES.}$$

q

PROPOSIÇÃO:

(15)

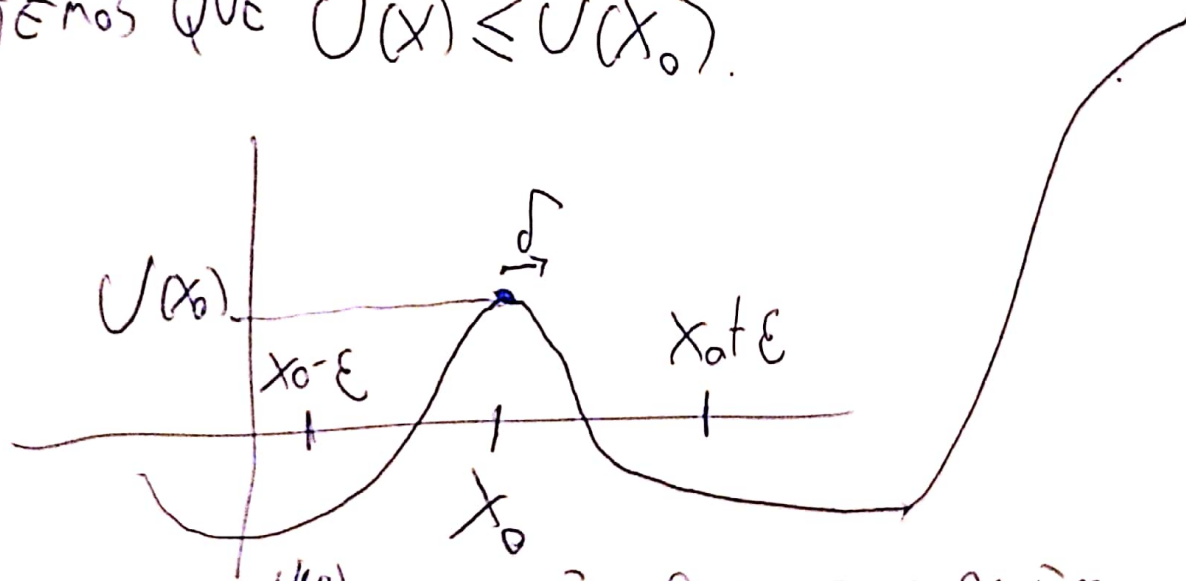
SE x_0 É UM PONTO DE MÁXIMO LOCAL.

DE $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ENTÃO O EQUILÍBRIO

$(x_0, 0)$ É INSTÁVEL SEGUNDO LIAPUNOV.

DEM: COMO x_0 É PONTO DE MÁXIMO LOCAL,

$\exists \epsilon > 0$ TAL QUE, P/ x , $|x - x_0| < \epsilon$,
TEMOS QUE $U(x) \leq U(x_0)$.



TO MÊNOS $\psi^{(A)}$ A SOLUÇÃO QUE COMEÇA EM
 (x_0, δ) .

COMO $E(x_0, \delta) > E(x_0, 0)$ E

E É CONSTANTE NAS SOLUÇÕES, TEMOS QUE
 E NQUANTO $|\psi(x) - x_0| < \epsilon$, VALE
 QUE

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + U(\psi(x)) = E(x_0, \delta) = \frac{1}{2} \delta^2 + U(x_0)$$

~~$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + U(\psi(x)) = E(x_0, \delta)$~~

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + U(\psi(x)) \leq \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + U(x_0)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \geq \frac{1}{2} \delta^2 \quad |\dot{\psi}| \geq \delta$$

TOCANDO $\bar{x} = \frac{\epsilon}{\delta}$ TEMOS QUE EXISTE
 $0 < x < \bar{x}$ TAL QUE $|\psi(x) - x_0| = \epsilon$.

Logo, PARA TODO $\delta > 0$, $\exists$ SOLUÇÃO QUE COMEÇA
 δ PRÓXIMA MAS FICA ϵ DISTANTE