EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II: Derivadas Parciais – parte 1

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

Agenda

1. Definição derivada – função de 1 variável
2. Definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis

Referência:

Caps 5 e 10:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

Agenda

1. Definição derivada – função de 1 variável
2. Definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis

Referência:

Caps 5 e 10:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Definição derivadas – função de 1 variável

A derivada f'(x) exprime o coeficiente angular da **tangente** à curva y = f(x) em função de x_0 (ou da coordenada x_0 do ponto de tangência).

OU

A derivada f'(x) exprime a taxa média de variação da função y = f(x) em um dado x_0.

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = x^2$, calcule o coeficiente angular da reta **tangente** ao gráfico no ponto genérico (x_0, y_0), considerando um acréscimo genérico de Δx:

- coeficiente angular (m) = $\dfrac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}}$ coeficiente angular da **secante** (reta que cruza o gráfico em dois pontos)

1. Definição derivadas – função de 1 variável *(continuação)*

- cálculo do coeficiente angular (m) = $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ a partir da função f(x) = x^2, considerando ponto genérico (x_0, y_0) e acréscimo genérico de Δx:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x_0)^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-(x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \boldsymbol{2x_0+\Delta x}$$

= coeficiente angular da secante

1. Definição derivadas – função de 1 variável *(continuação)*

- No ponto (3,9):

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x_0)^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

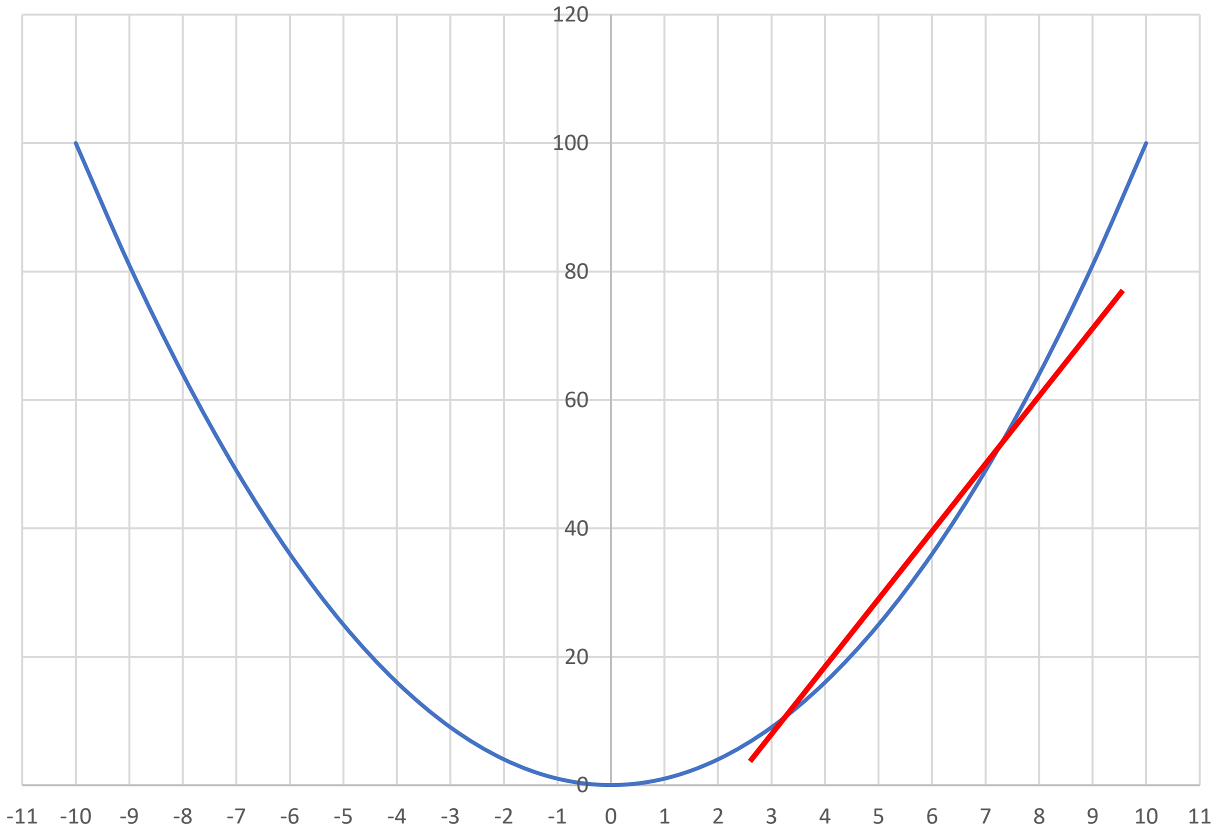
$$= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \boldsymbol{2x_0} + \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{2\,.\,3 + \Delta x} =$$

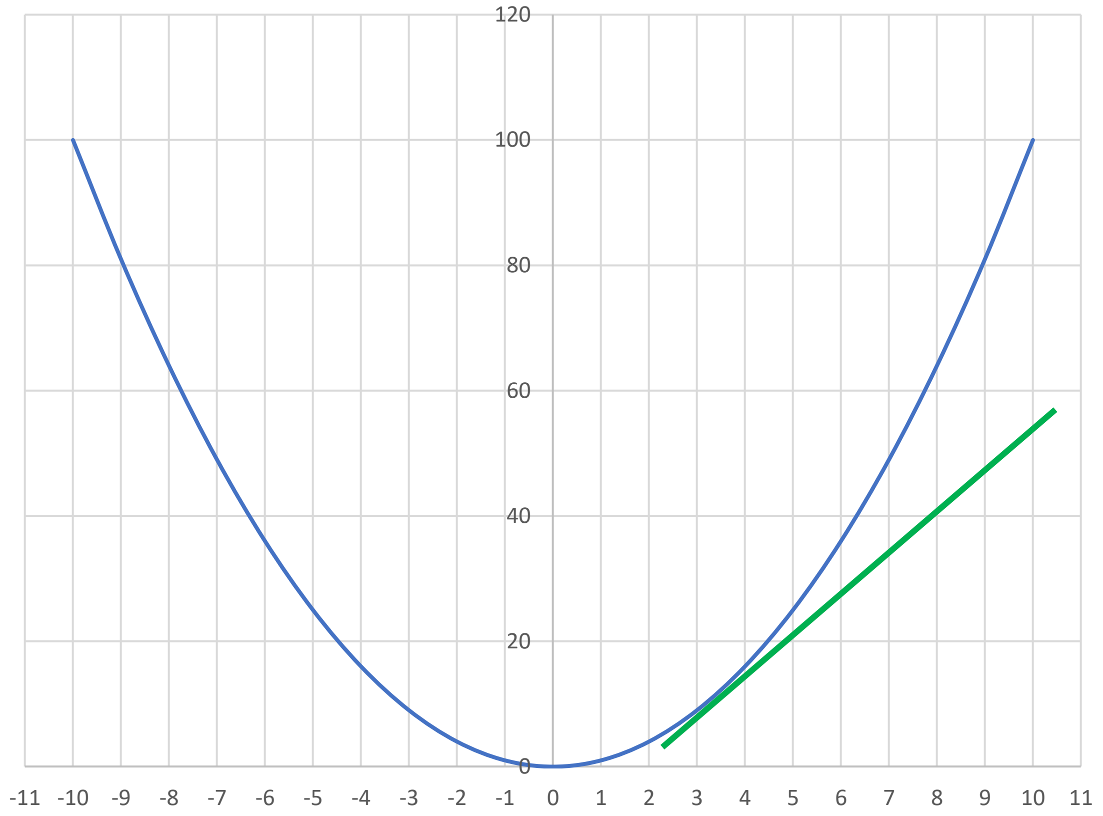
$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{6 + \Delta x}$$

1. Definição derivadas – função de 1 variável

Coeficiente angular da secante:



Coeficiente angular da tangente:



1. Definição derivadas – função de 1 variável *(continuação)*

- Para encontrar o coeficiente angular da tangente, $\boldsymbol{\Delta x}$ deve tender a zero:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Ou seja, $\boldsymbol{f'(x) = 2x_0}$

1. Definição derivadas – função de 1 variável *(continuação)*

- No ponto (3,9):

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Ou seja, $\boldsymbol{f'(x) = 2x_0 = 2 \,.\, 3 = 6}$

1. Definição derivadas – função de 1 variável *(continuação)*

- Se $\boldsymbol{\Delta x}$ é pequeno:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- No ponto (3,9):

$$f'(3) = 6 \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Supondo $\boldsymbol{\Delta x}$ = 1:

$$f'(3) = 6 \cong \frac{\Delta y}{1}$$

$$6\,.\,1 \cong \Delta y$$

$$\Delta y \cong 6$$

- ***A cada aumento de uma unidade em x, y aumenta em 6 unidades.***

Lembrando que a notação de derivada de função de 1 variável pode ser:

$$\frac{dy}{dx} \; ou \; \frac{df(x)}{dx} \; ou \; f'(x)$$

Agenda

1. Definição derivada – função de 1 variável
2. Definição de derivadas parciais – funções de 2 variáveis

<u>Referência</u>:

Caps 5 e 10:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis

- Seja z = f(x,y) uma função de 2 variáveis.
- A derivada parcial de f(x,y) em relação a x, mantendo y constante, é dada por:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \mid y\ constante$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Indica a variação de f(x,y) como resposta a variações infinitesimais em x, mantendo y constante.

Notação de derivada de função de 2 variáveis:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x$$

Derivada parcial em relação a x, mantendo y constante.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y$$

Derivada parcial em relação a y, mantendo x constante.

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

- Da mesma forma, a derivada parcial de f(x,y) em relação a y, mantendo x constante, é dada por:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \mid x \; constante$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Indica a variação de f(x,y) como resposta a variações infinitesimais em y, mantendo x constante.

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Exemplo 2:

Seja f(x,y) = 3x + 4y. Calcule a derivada parcial em relação a x e interprete o resultado.

- dado um ponto inicial genérico (x_0, y_0) e Δx genérico:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \mid y \; constante$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x_0 + \Delta x) + 4y_0] - [3x_0 + 4y_0]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x_0 + 3\Delta x + 4y_0] - 3x_0 - 4y_0]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3 = \mathbf{3}$$

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

- Exemplo:

Seja f(x,y) = 3x + 4y. Calcule a derivada parcial em relação a x e interprete o resultado.

$$\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x_0 + \Delta x) + 4y_0] - [3x_0 + 4y_0]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x_0 + 3\Delta x + 4y_0] - 3x_0 - 4y_0]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3 = \mathbf{3}$$

Derivada parcial em relação a x *= taxa de variação de z (ou f(x,y)), dada variação de x, mantendo y constante.*

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Interpretação:

- Se $\boldsymbol{\Delta x}$ é pequeno:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \mid y\ constante \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

- Voltando ao exemplo:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = \mathbf{3} \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

- Supondo $\boldsymbol{\Delta x}$ = 0,1:

$$\mathbf{3} \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\mathbf{0,1}}$$

$$\mathbf{3\ .\ 0,1} \cong \boldsymbol{\Delta z}$$

$$\boldsymbol{\Delta z} \cong \mathbf{0,3}$$

Derivada parcial em relação a x *= dada uma variação de 0,1 em x, z aumenta 0,3, mantendo y constante.*

Derivada parcial = "expressão genérica", vale para qualquer x_0 *.*

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Testando valores (utilizando a função f(x,y)):

- Suponha a seguinte tripla ordenada (x,y,z) = (1,2,11), ou seja, x=1, y=2 e z=11.
- Se $\boldsymbol{\Delta x}$ = 0,1, mantendo y constante, qual será a variação em z?
- Com $\boldsymbol{\Delta x}$ = 0,1, x passa de 1 para 1,1.
- Para saber qual será o impacto em z (ou $\boldsymbol{\Delta z}$), calcula-se:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x\ ,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)$$

- substituímos na função do exemplo 2,ou seja, em f(x,y) = 3x + 4y:

$$f(1{,}1\ ,\ 2) = 3(1{,}1) + 4(2) = 3{,}3 + 8 = 11{,}3$$

e

$$f(1\ ,\ 2) = 3(1) + 4(2) = 3 + 8 = 11$$

$$\Delta z = 11{,}3 - 11 = 0{,}3$$

Através da derivada parcial em relação a x já sabíamos que a variação em z seria = 0,3, *dada variação de 0,1 em x, mantendo y constante.*

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Exemplo 2: *(continuação)*

Seja f(x,y) = 3x + 4y. Calcule a derivada parcial em relação a y e interprete o resultado.

- dado um ponto inicial genérico $(x_0,\ y_0)$ e Δx genérico:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \mid x\ constante$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3(x_0) + 4(y_0 + \Delta y)] - [3x_0 + 4y_0]}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3x_0 + 4y_0 + 4\Delta y - 3x_0 - 4y_0]}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4\Delta y}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 4 = \mathbf{4}$$

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

- Exemplo:

Seja f(x,y) = 3x + 4y. Calcule a derivada parcial em relação a y e interprete o resultado.

Derivada parcial em relação a y *= taxa de variação de z (ou f(x,y)), dada variação de y, mantendo x constante.*

$$\boldsymbol{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3(x_0) + 4(y_0 + \Delta y)] - [3x_0 + 4y_0]}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3x_0 + 4y_0 + 4\Delta y] - 3x_0 - 4y_0]}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta y}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 4 = \mathbf{4}$$

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Interpretação:

- Se $\boldsymbol{\Delta y}$ é pequeno:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \mid x\ constante \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\boldsymbol{\Delta y}}$$

- Voltando ao exemplo:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} 4 = \mathbf{4} \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\boldsymbol{\Delta y}}$$

- Supondo $\boldsymbol{\Delta y}$ = 0,1:

$$\mathbf{4} \cong \frac{\boldsymbol{\Delta z}}{\mathbf{0,1}}$$

$$\mathbf{4\ .\ 0,1} \cong \boldsymbol{\Delta z}$$

$$\boldsymbol{\Delta z} \cong \mathbf{0,4}$$

Derivada parcial em relação a y *= dada uma variação de 0,1 em y, z aumenta 0,4, mantendo x constante.*

Derivada parcial = "expressão genérica", vale para qualquer y_0 .

2. Definição derivadas parciais – função de 2 variáveis *(continuação)*

Testando valores (utilizando a função f(x,y)):

- Suponha a seguinte tripla ordenada (x,y,z) = (1,2,11), ou seja, x=1, y=2 e z=11.
- Se $\boldsymbol{\Delta y}$ = 0,1, mantendo x constante, qual será a variação em z?
- Com $\boldsymbol{\Delta y}$ = 0,1, y passa de 2 para 2,1.
- Para saber qual será o impacto em z (ou $\boldsymbol{\Delta z}$), calcula-se:

$$\Delta z = f(x_0\, , y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

- substituímos na função do exemplo 2,ou seja, em f(x,y) = 3x + 4y:

f(1 , 2,1) = 3(1) + 4(2,1) = 3 + 8,4 = 11,4

e

f(1 , 2) = 3(1) + 4(2) = 3 + 8 = 11

$\boldsymbol{\Delta z}$ = **11,4 – 11 = 0,4**

Através da derivada parcial em relação a x já sabíamos que a variação em z seria = 0,4, *dada variação de 0,1 em y, mantendo x constante.*