EXERCÍCIOS DE MAT-230-I

RICARDO BIANCONI

Resumo. Esta lista serve como auxílio para a P1.

1. Postulados de Incidência

Esses postulados referem-se a uma relação entre pontos e retas: escreveremos informalmente "*o ponto P está na reta r*", ou também "*a reta r contém o ponto P*".

(I 1): Dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta m contendo esses dois pontos. Tal reta também é denotada $\overleftrightarrow{AB}$ (ou tembém $\overleftrightarrow{BA}$; a ordem dos pontos não importa aqui).

(I 2): Cada reta tem pelo menos dois pontos distintos.

(I 3): Existem pelo menos três pontos não colineares (ou seja, não estão na mesma reta).

Exemplo 1 (Plano Afim de Ordem 2)**.** Seja $\mathbb{A} = \{A, B, C, D\}$ (conjunto com 4 elementos distintos), que chamaremos de *conjunto de pontos*, e seja $\mathbb{L} = \{\{A, B\}; \{A, C\}; \{A, D\}; \{B, C\}; \{B, D\}; \{C, D\}\}$ (conjunto de subconjuntos de $\mathbb{A}$), que chamaremos conjunto de retas. Mostre que esse par de conjuntos satisfaz os postulados de incidência.

. . . .

Solução. Cada par de pontos distintos aparece na lista das retas. Daí, vale o primeiro postulado. Cada reta da lista consiste de um conjunto de dois pontos distintos, ou seja, vale o segundo postulado. Os pontos A, B e C, por exemplo, não estão em uma única reta e, assim, vale o terceiro postulado.

Observação. Para verificar que existem objetos com certas propriedades, basta exibir um exemplo. Foi o que fiz para o terceiro postulado.

Exercício 1 (Plano Projetivo de Ordem 2)**.** Sejam $\mathbb{P} = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G\}$ e $\mathbb{L} = \{\{A, B, C\};\ \{C, D, E\};\ \{E, F, A\};\ \{A, G, D\};\ \{B, G, E\};\ \{C, G, F\};\ \{B, D, F\}\}$. Mostre que esse par também satisfaz os postulados de incidência.

Exemplo 2. Mostre que dado um ponto P, existem pelo menos duas retas distintas contendo P.

. . . .

Solução. Como observado acima, tenho que exibir um exemplo de duas retas contendo o ponto P dado. Para isso, precisamos de mais pontos para poder exibir as retas desejadas. Onde vamos buscá-los? Boa pergunta! O que temos em mãos são os postulados e é lá que vamos buscar mais pontos.

O Terceiro Postulado diz que *existem pelo menos três pontos não colineares*, que vou chamá-los de A, B e C. Especificamente, isso quer dizer que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são três retas distintas.

Bom, podem acontecer duas coisas: o ponto P é um desses três pontos A, B, ou C; ou o ponto P é distinto desses três pontos. No primeiro caso, basta observar que cada um dos três pontos A, B e C pertencem a duas retas distintas naquela lista. No segundo caso, pelo menos duas das retas $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ têm que ser distintas, pois se fossem a mesma reta, os pontos A, B e C seriam colineares, contradizendo a hipótese de que não são colineares.

Exercício 2 (Geometria Analítica - Plano Euclidiano)**.** Mostre que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ com as retas dadas pelos conjuntos soluções de equações do tipo $ax + by + c = 0$, com $(a, b) \neq (0, 0)$ satisfaz os postulados de incidência. [**Sugestão:** *dados dois pontos distintos* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1)*, para achar a equação da reta, resolva o sistema de duas equações e três incógnitas a, b e c,* $x_j a + y_j b + c = 0$*,* $j = 0, 1$*; o conjunto solução será infinito, mas cada equação dessa lista descreve a mesma reta.*]

Exemplo 3 (Plano Hiperbólico)**.** Seja $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ o conjunto dos pontos; as retas são de dois tipos: $\ell_{x_0} = \{(x_0, y) : y > 0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, ("semirretas" verticais) e $\ell_{a,\rho} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x-a)^2+y^2 = \rho^2\}$, $a \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$, ("semicircunferências" centradas no eixo x). Mostre que esse par de conjuntos de pontos e retas satisfaz os postulados de incidência.

. . . .

Solução. Aqui precisamos ter um pouco de cuidado com os enunciados dos postulados.

Primeiro Postulado. Dados dois pontos distintos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, podemos encontrar duas situações: $x_0 = x_1$ (e, portanto, $y_0 \neq y_1$); ou $x_0 \neq x_1$.

No caso em que $x_0 = x_1$, vemos que $A, B \in \ell_{x_0}$, ou seja *existe* uma reta contendo os dois pontos. Só que o postulado diz mais do que isso: essa reta deve ser única, ou seja, temos que mostrar que não existe outra possibilidade de reta contendo esses pontos. Das retas verticais, a única possibilidade é a que já exibimos, ℓ_{x_0}. Visualmente (faça um desenho) podemos ver que A e B não podem pertencer a uma reta do tipo $\ell a, \rho$. Para termos certeza de que realmente isso não pode acontecer, basta tentar resolver em a e ρ o sistema de equações $(x_0 - a)^2 + y_j^2 = \rho^2$, $j = 0, 1$. Subtraia uma equação da outra, cancelando quase tudo e sobrando apenas $y_1^2 - y_0^2 = 0$. Como $y_0 \neq y_1$ e $y_0, y_1 > 0$, $y_1^2 - y_0^2 \neq 0$. Essa contradição significa que o sistema não tem solução. Portanto os pontos A e B acima não podem pertencer a uma reta do tipo $\ell_{a,\rho}$. Resumindo, obtivemos a unicidade da reta contendo A e B.

No caso em que $x_0 \neq x_1$, devemos procurar uma reta do tipo $\ell_{a,\rho}$ (obviamente esses pontos não podem estar em uma reta do tipo $\ell_{\bar{x}}$). Resolva o sistema de duas equações nas duas incógnitas a e ρ, $(x_j - a)^2 + y_j^2 = \rho^2$, $j = 0, 1$, obtendo solução única (com $\rho > 0$)

$$a = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2(x_1 - x_0)}; \quad \rho = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}$$

Segundo Postulado. Como cada reta tem infinitos pontos,é claro que tem pelo menos dois pontos distintos.

Terceiro Postulado. Considere o exemplo: $A = (0, 1)$, $B = (0, 2)$ e $C = (1, 1)$. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é ℓ_0 (vertical). A reta $\overleftrightarrow{AC}$ não pode ser vertical. Assim, exibimos um exemplo de três pontos não colineares.

---

2. Postulados de Ordem

A relação de ordem de pontos relaciona três pontos, $P - Q - R$, onde se lê *o ponto Q está entre os pontos P e R.*

- **(O 1):** Se $A - B - C$, então A, B e C são três pontos distintos e colineares.
- **(O 2):** Se $A - B - C$, então $C - B - A$.
- **(O 3):** Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E, tais que $A - B - C$, $B - C - D$ e $C - D - E$.
- **(O 4):** Dados três pontos distintos e colineares A, B e C, uma e somente uma relação ocorre dentre $A - B - C$, $A - C - B$ e $B - A - C$.

(O 5): Se $A - B - C$, $B - D - C$ e $B - C - E$, então valem $A - B - D$, $A - D - C$, $A - B - E$ e $B - C - E$.

(O 6–Pasch): Dados três pontos não colineares A, B e C, e uma reta r que não contenha nenhum desses pontos, se existir um ponto D em r, tal que $B - D - C$, então existe um ponto E em r, tal que ou $A - E - B$, ou $A - E - C$. (Outro modo de ler esse postulado: *se uma reta corta um lado de um triângulo e não contém nenhum dos vértices, então deve cortar um segundo lado desse triângulo.*)

Exercício 3. Mostre que cada retacontém uma infinidade de pontos. [Sugestão: mostre por indução que cada reta tem pelo menos n pontos para todo $n \geq 2$. Use os postulados (I 2), (O 3) e (O 1).]

Exemplo 4. Mostre que no Postulado de Pasch (O 6), a reta somente pode cortar dois lados do dito triângulo.

. . . .

Solução. Vamos mostrar que se a hipótese de existência de tal reta levaria a uma contradição.

Sejam A, B e C três pontos não colineares. Suponha que a reta r contenha os pontos D, E e F, tais que $A - D - B$, $B - E - C$ e $C - F - A$. Suponhamos que $D - E - F$ (os outros casos são *análogos*: o texto da argumentação é o mesmo, com a troca de nomes de pontos).

(Um argumento padrão.) Os pontos D, E e F têm que ser distintos, pois, por exemplo, se $D = E$, como D está em $\overleftrightarrow{AB}$ e E em $\overleftrightarrow{BC}$, e $E = D \neq A, B, C$, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ seria igual à reta $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{BD}$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$ seria igual à reta $\overleftrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{BD}$. Mas, daí, essa reta conteria os pontos A, B e C, contradizendo a sua não colinearidade. Os casos em que $D = F$, ou $E = F$ são análogos.

O mesmo tipo de argumento mostra que os pontos A, D e F não são colineares.

Agora, a reta $\overleftrightarrow{BC}$ contém o ponto E, tal que $D - E - F$. Pelo Postulado de Pasch (O 6), deve existir um ponto G, tal que ou $A - G - D$, ou $A - G - F$. Novamente o argumento padrão acima teria como conclusão que A, B e C teriam que ser colineares, novamente uma contradição.

Exercício 4. Dados os pontos nas ordens indicadas, $A - B - C$ e $A - D - E$, com A, B e D não colineares, mostre que existe um (únco) ponto F, tal que $B-F-E$ e $D-E-C$. [*Sugestão: use o Postulado de Pasch (O 6), com a reta* $\overleftrightarrow{BE}$ *e os pontos A, C e D. Faça um desenho para visualizar.*]

Com a relação de ordem, dados dois pontos distintos, A e B, podemos definir o **segmento** $\overline{AB} = \{P : P = A, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - P - B\}$. O **interior do segmento** $\overline{AB}$ é $\text{int}(\overline{AB}) = \{P : A{-}P{-}B\}$. A **semirreta** $\overrightarrow{AB} = \{P : P = A, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - P - B, \text{ ou } A - B - P\}$. O ponto A é o **vértice** da semirreta $\overrightarrow{AB}$. O **interior da semirreta** $\overrightarrow{AB}$ é $\text{int}(\overrightarrow{AB}) = \{P \in \overrightarrow{AB} : P \neq A\}$.

Um **ângulo** $\angle AOB$ 'e a união de duas semirretas não colineares e de mesmo vértice, $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.

. . . .

Um conjunto de pontos $\mathcal{X}$ é **convexo** se para todo par de pontos distintos $P, Q \in \mathcal{X}$, o segmento $\overline{PQ}$ está todo contido em $\mathcal{X}$, $\overline{PQ} \subseteq \mathcal{X}$.

Exercício 5. Mostre que se $P, Q \in \overline{AB}$ forem pontos distintos, então $\overline{PQ} \subseteq \overline{AB}$. Mostre que se $P, Q \in \overrightarrow{AB}$ e $A - P - Q$, então $\overrightarrow{PQ} \subseteq \overrightarrow{AB}$. [Sugestão: use o Postulado (O 5).]

Exercício 6. Mostre que uma semirreta, um segmento, o conjunto vazio e o conjunto contendo um único ponto são conjuntos convexos. Mostre que um ângulo não é um conjunto convexo.

Exercício 7. Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Exemplo 5 (Separação do Plano)**.** Dada a reta r existem dois conjuntos convexos e disjuntos H_1 e H_2, tais que

(a) nenhum ponto de r está em H_1 e nem em H_2;
(b) cada ponto do plano está ou na reta, ou e, H_1, ou em H_2;
(c) para cada par de pontos $P_1 \in H_1$ e $P_2 \in H_2$, existe um ponto $Q \in \text{int}(\overline{P_1P_2})$ que está na reta r.

Os conjuntos H_1 e H_2 são chamados de **semiplanos de origem** r.

. . . .

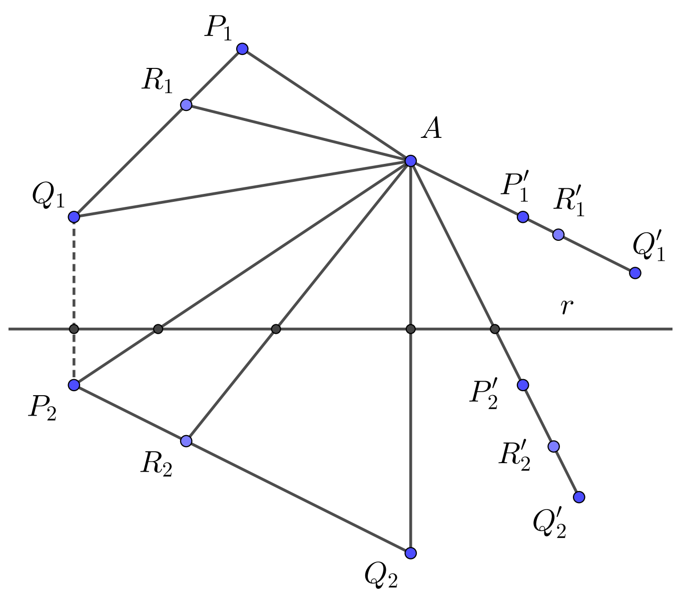
Solução. Pelo Postulado (I 3), existe um ponto A fora da reta r. Sejam $H_1 = \{P : \overline{AP}$ não tenha pontos de $r\}$, e $H_2 = \{P :$ existe ponto Q de r, tal que $P - Q - A\}$. Com essas definições, fica claro que H_1 e H_2 são disjuntos. Se K for um ponto de r, certamente $K \notin H_1$ e $K \notin H_2$ (aqui usamos quais postulados?). Um ponto qualquer do plano ou está em r, ou não está em r. Se não estiver em r, ou o segmento $\overline{AP}$ cruza r (e, daí, estará em H_2), ou não cruza r (e, então, estará em H_1).

Com isso, já temos em mãos que H_1 e H_2 são disjuntos e os itens (a) e (b) do enunciado.

Mostremos que H_1 é convexo. Sejam $P, Q \in H_1$ dois pontos distintos. Temos que mostrar que todo ponto R o segmento $\overline{PQ}$ está em H_1.

Consideremos primeiramente o caso em que A, P e Q não sejam colineares. Como os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{QA}$ não contêm pontos de r (pela definição de H_1), pelo Postulado de Pasch (O 6) aplicado aos pontos A, P e Q, e a reta r, o segmento $\overline{PQ}$ não pode conter pontos de r. Seja $R \in \overline{PQ}$, $R \neq P$. O Postulado de Pasch (O 6) com os pontos A, P e R, e reta r, implica que $R \in H_1$, pois os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PR}$ não contêm pontos de r.

O caso em que A, P e Q são colineares é simples e deixado como exercício.



Mostremos agora que H_2 é convexo. Sejam $P, Q \in H_2$ dois pontos distintos. Se $P - Q - A$ ou $Q - P - A$, como um dos segmentos $\overline{AP}$ ou $\overline{AQ}$ está contido no outro e ambos cruzam a reta r em um ponto X, e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é distinta de r, para qualquer ponto $R \in \overline{PQ}$, o segmento $\overline{AR}$ contém o ponto X de r e, portanto $R \in H_2$.

Se A, P e Q não forem colineares, como os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ cruzam r, o segmento $\overline{PQ}$ não pode cruzar r (por que?). Se $R \in \overline{PQ}$ e $R \neq P$, o segmento $\overline{PR} \subseteq \overline{PQ}$ não cruza r. Por Pasch (O 6) com os pontos A, P e R, e a reta r, o segmento $\overline{AR}$ deve cruzar r, ou seja, $R \in H_2$.

Com isso, finalizamos a parte da convexidade de H_1 e H_2.

Para finalizar, precisamos mostrar o item (c).

Sejam $P \in H_1$ e $Q \in H_2$. Se $P = A$, ou $A - P - Q$, ou $P - A - Q$, pela definição de H_2, o segmento $\overline{PQ}$ cruza a reta r (no mesmo ponto que o segmento $\overline{QA}$.

Se A, P e Q não forem colineares, o Postulado de Pasch (O 6), aplicado aos pontos A, P e Q, e à reta r, implica que o segmento $\overline{PQ}$ tem que cruzar r.

O **Interior do ângulo** $\angle AOB$ é o conjunto $\text{int}(\angle ABC) = H \cap H'$, onde H é o semiplano de origem $\overleftrightarrow{OA}$ contendo B e $H1$ é o semiplano de origem $\overleftrightarrow{OB}$ contendo A.

. . . .

Dados os pontos não colineares A, B e C, o **triângulo** $\triangle ABC$ é o conjunto $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$. Cada um desses três segmentos é uma **aresta** do triângulo e cada um dos pontos A, B e C é um **vértice** do triângulo. O **interior do triângulo** $\triangle ABC$ é o conjunto $\text{int}(\triangle ABC) = H_1 \cap H_1' \cap H_1''$, onde H_1 é o semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$ contendo C, H_1' é o semiplano de origem $\overleftrightarrow{AC}$ contendo B e H_1'' é o semiplano de origem $\overleftrightarrow{BC}$ contendo A.

Exercício 8 (Barras transversais)**.** Dado $P \in \text{int} \angle AOB$, mostre que existe um ponto $Q \in \overline{AB} \cap \overrightarrow{OP}$.

Exercício 9. Dados os pontos na ordem indicada $A - B - C$, uma reta $r \neq \overleftrightarrow{AB}$ contendo C, e O um ponto fora dessas duas retas. Sejam A' e B' dois pontos na reta r, tais que A' esteja em $\overleftrightarrow{OA}$ e B' em $\overleftrightarrow{OB}$. Mostre que se $O \in \text{int}(\angle ACA')$, então $B' - A' - C$. [Sugestão: aplique o Postulado de Pasch (O 6).]

Exercício 10. Dados os pontos na ordem indicada $A - B - C$, uma reta $r \neq \overleftrightarrow{AB}$ contendo C, e O um ponto fora dessas duas retas. Sejam A' e B' dois pontos na reta r, tais que A' esteja em $\overleftrightarrow{OA}$ e B' em $\overleftrightarrow{OB}$. Mostre que se $O - A - A'$, então $A' - B' - C$. [Sugestão: Barras Transversais.]

---

3. Postulados de Congruência

Os postulados de congruência referem-se, na verdade, a dois tipos de congruência: entre segmentos e entre ângulos. Usamos o mesmo símbolo "$\equiv$" em ambos os casos. Assim, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ refere a congruência de segmentos e $\angle AOB \equiv \angle CPD$ refere-se a congruência de ângulos.

Um dos postulados refere-se a triângulos. Denotamos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (as ordens dos vértices é importante aqui) a junção das 6 congruências:

(i) $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$;
(ii) $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$;
(iii) $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$;
(iv) $\angle BAC \equiv \angle EDF$;
(v) $\angle ABC \equiv \angle DEF$;
(vi) $\angle ACB \equiv \angle DFE$.

Com isso, podemos enunciar os **Postulados de Congruência**:

(CS 1): Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{CD}$, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$, tal que $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$.

(CS 2): Para todo segmento $\overline{AB}$, vale $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.

(CS 3): Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$.

(CS 4): Se $A-B-C$, $D-E-F$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$.

(CA 1): Dados um ângulo $\angle BAC$, uma semirreta $\overrightarrow{DE}$ e um dos semiplanos H de origem $\overleftrightarrow{DE}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{DF}$, com $F \in H$, tal que $\angle BAC \equiv \angle EDF$.

(CA 2): Para cada ângulo $\angle BAC$, vale $\angle BAC \equiv \angle BAC$.

(CA 3): Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle BAC \equiv \angle HGI$, então vale $\angle EDF \equiv \angle HGI$.

(CA 4): Se $D \in \mathrm{int}(\angle BAC)$ e $E \in \mathrm{int}(\angle QPR)$ forem tais que $\angle BAD \equiv \angle QPE$ e $\angle DAC \equiv \angle EPR$, então $\angle BAC \equiv \angle QPR$.

(LAL): Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Exercício 11. Mostre que se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$. Mostre que se $\angle ABC \equiv \angle DEF$, então $\angle DEF \equiv \angle ABC$. [Sugestão: use o Postulado (CS 3) com $E = A$ e $F = B$, mais o postulado (CS 2). Análogo para os ângulos.]

Exercício 12 (Transitividade)**.** Mostre que se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$. [Sugestão: pelo exercício anterior, $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, etc.]

Mostre que se $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle DEF \equiv \angle GHI$, então $\angle ABC \equiv \angle GHI$.

Exercício 13. Dados o triângulo $\triangle ABC$, um segmento $\overline{DE} \equiv \overline{AB}$ e um semiplano $\mathcal{H}$ de origem $\overleftrightarrow{DE}$, mostre que existe um único ponto $F \in \mathcal{H}$, tal que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. [Sugestão: use os postulados (CA 1), (CS 1) e (LAL).]

Exemplo 6 (Ângulo-Lado-Ângulo: ALA)**.** Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

. . . . Seja F' um ponto no mesmo semiplano que F de origem $\overleftrightarrow{DE}$ e tal que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF'$ (que existe pelo exercício anterior). Das hipóteses $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, concluímos as igualdades $\angle EDF = \angle EDF'$ e $\angle DEF \equiv \angle DEF'$ e, portanto, as igualdades $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF'}$ e $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF'}$. A intersecção dessas semirretas é o ponto $F = F'$. Assim, $\triangle DEF = \triangle DEF' \equiv \triangle ABC$. ______________

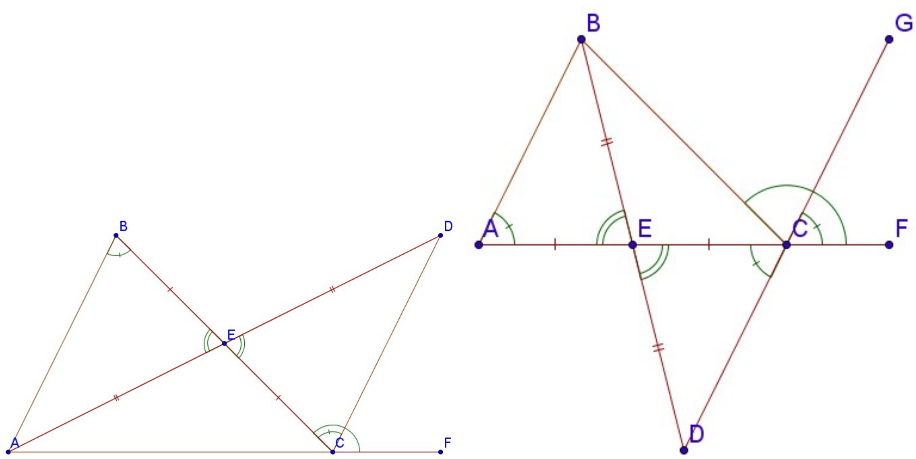
Exercício 14 (Ponto médio de Segmento)**.** Dado o segmento $\overline{AB}$, mostre que existe um (único) ponto $M \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. [Sugestão: construa $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ – perceba a ordem dos pontos – tal que C e D estejam em semiplanos opostos, de origem $\overleftrightarrow{AB}$. Seja $M \in \overline{ABCD}$. Mostre as congruências: $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$, e $\triangle ACM \equiv \triangle BDM$ e conclua que M é o ponto médio de $\overline{AB}$; você pode usar (LAL) e (ALA).]

Comparação de segmentos: dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é *menor que* o segmento $\overline{CD}$, se existir E, tal que $C - E - D$ e $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$. Notação: $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Comparação de ângulos: dizemos que o ângulo $\angle ABC$ é *menor que* o ângulo $\angle DEF$ se existir $G \in \mathrm{int}(\angle DEF)$, tal que $\angle DEG \equiv \angle ABC$.

Exercício 15 (Ângulos Opostos pelo Vértice)**.** Dados os pontos na ordem indicada $A - O - B$ e $C - O - D$, não todos colineares, mostre que $\angle AOC \equiv \angle BOD$. [Sugestão: escolhemos novos pontos e os renomeamos de modo que podemos já supor que $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$ e $\overline{CO} \equiv \overline{OD}$; assim, O será o ponto médio de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$. Seja D' em semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$ que não contém o ponto C, e tal que $\triangle ABC \equiv \triangle BAD'$. A reta $\overleftrightarrow{CD'}$ deverá coincidir com a reta $\overleftrightarrow{CD}$. Mostre que $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$.]

Exemplo 7 (Teorema do Ângulo Externo)**.** Dado o triângulo $\triangle ABC$, seja F tal que $A - C - F$. Mostre que $\angle ABC < \angle FCB$ e $\angle BAC < \angle FCB$.



Solução. Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$. Seja D, tal que $A - E - D$ e $\overline{AE} \equiv \overline{DE}$. Pelo exercício anterior e (LAL), $\triangle EAB \equiv \triangle EDC$. Como $D \in \mathrm{int}(\angle FCB)$ e $\angle ABC \equiv \angle BCD$, tamos que $\angle ABC < \angle FCB$.

Agora, tome E' o ponto médio de $\overline{BC}$, etc, e conclua que $\angle BAC < \angle FCB$.

Exercício 16 (Lado-Ângulo-Ângulo (LAA))**.** Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, suponha que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle ACB \equiv \angle DFE$. Mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. [Sugestão: seja $F' \in \overrightarrow{DF}$, tal que $\overline{DF'} \equiv \overline{AC}$. Use (LAL) e o Teorema do Ângulo

Externo para mostra que $F' = F$, eliminando os casos $A - F' - F$ e $A - F - F'$.]

Exercício 17 (Triângulos Isósceles)**.** Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle BAC \equiv \angle ABC$. Tais triângulos são chamados de isósceles.

Exercício 18 (Perpendiculares-I)**.** Dada uma reta r e um ponto A fora dela, existe uma única reta s contendo A e formando com r ângulos retos, denotando $s \perp r$. [Sugestão: seja B um ponto de R. Se $\overleftrightarrow{AR} \perp r$, estamos com sorte; senão, sejam $C \neq B$ outro ponto de r e A' no semiplano de origem r que não contém A,e tal que $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$; seja $M \in \overline{AA'}$, tal que esteja em r. Mostre que $\overleftrightarrow{AM} \perp r$.]

Exercício 19 (Perpendiculares-II)**.** Dada uma reta r e um ponto A em r, mostre que existe uma única reta $s \perp r$ contendo A. [Sugestão: sejam P e Q em r, tais que $P - A - Q$ e $\overline{PA} \equiv \overline{AQ}$; sejam B e C no mesmo semiplano de origem r, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\angle BAP \equiv \angle CAQ$. Seja $D \in \overline{BC}$ o ponto médio. Mostre que $\overleftrightarrow{AM} \perp r$.]

Exercício 20. Sejam A, B, C e D pontos distintos, tais que A e B estejam no mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{CD}$, e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BD}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Sejam $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{CD}$ os seus pontos médios. Mostre que $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$. [Cuidado! Você não pode chamar essa figura de *retângulo* sem a presença do vindouro Postulado das Paralelas Euclidiano. Por isso, você deve pesquisar as congruências de diversos triângulos para concluir o exercício. Eu considero errado assumir que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.]
