

Aula de Revisão 1

"João" Pedro Saito

IME-USP

September 22, 2020

Exercício 1 - Lista 1 Extra

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições geométricas de parâmetro p . Prove que, com probabilidade 1, somente um número finito dos X_n são maiores do que n .

Exercício 1 - Lista 1 Extra

Solução Seja $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de eventos $A_n = \{X_n > n\}$. Devemos calcular

$$P(\liminf A_n^c) = 1 - P(\limsup A_n) =$$

$$1 - P(\lim A_n) = 1 - \lim P(A_n)$$

A penúltima igualdade vale pois a sequência A_n é decrescente e a última igualdade resulta da continuidade da probabilidade.

Exercício 1 - Lista 1 Extra

Temos

$$P(A_n) = P(X_n > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p =$$

$$\frac{p \cdot (1-p)^n}{1 - (1-p)} = (1-p)^n$$

Concluimos que $\lim P(A_n) = 0$, e, portanto, $P(A_n \text{ i.v.}) = 0$.

Exercício 2 - Lista 1 Extra

Seja X uma variável aleatória positiva e $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas por

$$X_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{X}{1+X} \right)^{k-1}, \quad n \geq 1$$

Considere os $(A_n)_{n \geq 1}$ com $A_n = \{X_n > \frac{1}{m}\}$ para $m \in \mathbb{N}$. Prove que $P(A_n \text{ i.v.}) = 1$

Exercício 2 - Lista 1 Extra

Solução Primeiramente observe que

$$X_n - X_{n-1} = \left(\frac{X}{1+X} \right)^{n-1} > 0$$

Então a sequência $(X_n)_{n \geq 1}$ é crescente, e, portanto, a sequência de eventos $A_n = \{X_n > \frac{1}{m}\}$, para $m \in \mathbb{N}$ fixado, também o é.

Exercício 2 - Lista 1 Extra

Além disso

$$P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = \lim P(A_n) = 1,$$

pois, além da continuidade (penúltima igualdade), temos

$$\lim P(A_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{X}{1+X}\right)^{k-1} > \frac{1}{m}\right) = P\left(X + 1 > \frac{1}{m}\right)$$

$$P\left(X > \frac{1}{m} - 1\right) = 1.$$

O resultado vale pois X é positiva. Concluimos que $P(A_n \text{ i.v.}) = 1$

Exercício 1 - Lista 2 Extra

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Considere, para cada número natural m , o evento

$$A_k = \{|X_k - X| > \frac{1}{m}\}.$$

Prove que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, ache o limite X e mostre que $E[X_n^k]$ não converge para $E[X^k]$ para $k=1,2,3,\dots$

Exercício 1 - Lista 2 Extra

Considere $X = 0$ um candidato a limite para X . Temos:

$$P(A_n) = P(|X_n - X| > \frac{1}{n}) = P(X_n > \frac{1}{n})$$

Observe que $\frac{1}{n}$ é sempre positivo. Então

$$P(A_n) = P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$$

Exercício 1 - Lista 2 Extra

Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

e, portanto, por Corolário,

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X = 0$$

Exercício 1 - Lista 2 Extra

Agora, temos

$$E[X_n^k] = \sum_{i=0}^{\infty} i^k \cdot P(X_n = i) =$$

$$0^k \cdot P(X_n = 0) + 0 + \dots + (n^2)^k \cdot P(X_n = n^2) + 0 \dots = n^{2k} \cdot \frac{1}{n^2} =$$
$$n^{2k-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Por outro lado, $E[X^k] = E[0^k] = 0$.

Concluimos que $E[X_n^k]$ não converge para $E[X^k]$ para $k=1,2,3,\dots$

Exercício 1 - Lista 4 Extra

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli com parâmetro p ($0 < p < 1$). Defina $Y_n = \left(\prod_{k=1}^n X_k \right)^{\frac{1}{n}}$.

- a) Calcule $P(Y_n > 0)$ e $E[Y_n]$.
- b) Verifique se Y_n converge em probabilidade.

Exercício 1 - Lista 4 Extra

Solução

Observe que X_i assume apenas valores 0 e 1. Logo Y_n também.
Temos

$$P(Y_n > 0) = P\left(\left(\prod_{k=1}^n X_k\right)^{\frac{1}{n}} > 0\right) = P\left(\prod_{k=1}^n X_k > 0\right) =$$

$$P\left(\prod_{k=1}^n X_k = 1\right) = P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) =$$

$$\prod_{k=1}^n P(X_k = 1) = [P(X_1 = 1)]^n = p^n$$

Exercício 1 - Lista 4 Extra

A antepenúltima e a penúltima igualdades valem pois X_k são i.i.d Bernoulli(p).

Concluimos que Y_n tem distribuição de Bernoulli(p^n), e, portanto $E[Y_n] = p^n$

Verifiquemos se Y_n converge em probabilidade.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0.$$

A penúltima igualdade vale pois Y_n assume valores positivos com probabilidade p^n . Concluimos que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.