Cálculo de Probabilidades na Distribuição Normal Padrão

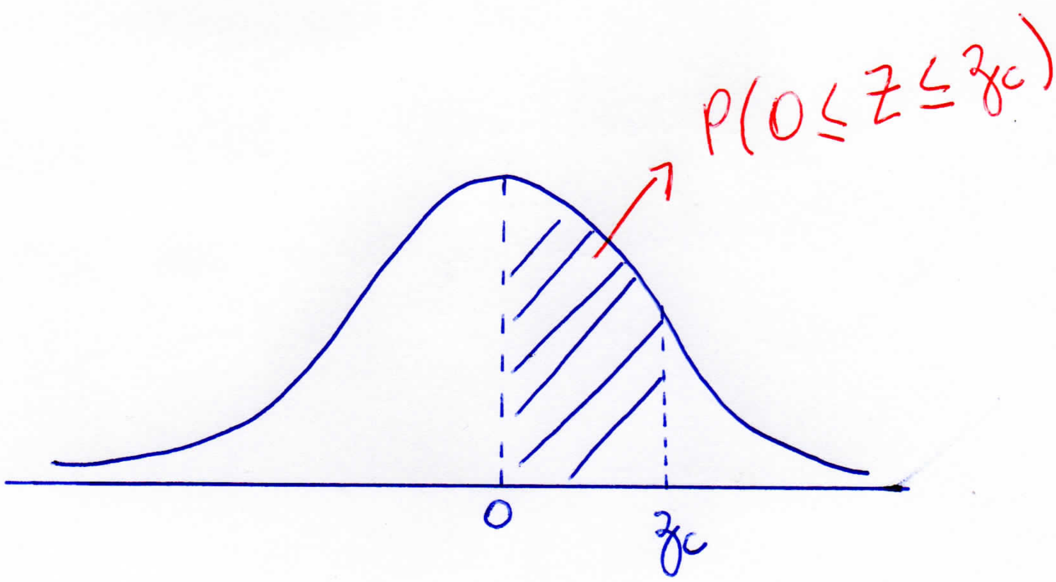
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu = E(X)$

$\sigma^2 > 0 \quad \sigma^2 = Var(X)$

Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, $Z \sim N(0,1)$ é a distribuição normal padrão ou normal reduzida.

Tabela do Apêndice Magalhães e Lima fornece os valores de

$P(0 \leq Z \leq z_c)$ para $0 \leq z_c \leq 3{,}99$



2

Distribuição Normal: Valores de p tais que $P(0 \leq Z \leq z_c) = p$

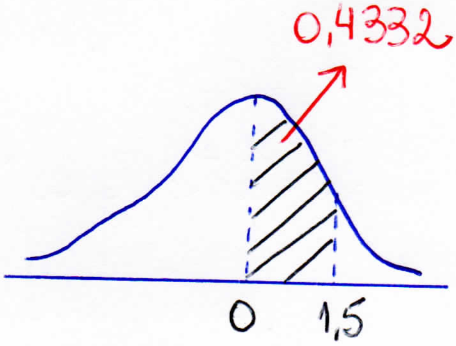
Segunda decimal de z_c

Parte inteira e primeira decimal de z_c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	**0,0**
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	**0,1**
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	**0,2**
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517	**0,3**
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879	**0,4**
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	**0,5**
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549	**0,6**
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852	**0,7**
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	**0,8**
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389	**0,9**
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621	**1,0**
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830	**1,1**
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015	**1,2**
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	**1,3**
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319	**1,4**
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441	**1,5**
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545	**1,6**
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633	**1,7**
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706	**1,8**
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767	**1,9**
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817	**2,0**
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857	**2,1**
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890	**2,2**
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916	**2,3**
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936	**2,4**
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952	**2,5**
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964	**2,6**
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974	**2,7**
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981	**2,8**
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986	**2,9**
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	**3,0**
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993	**3,1**
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995	**3,2**
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	**3,3**
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	**3,4**
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	**3,5**
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,6**
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,7**
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	**3,8**
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	**3,9**

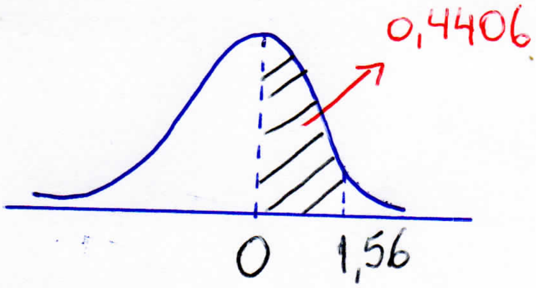
Calcular as seguintes probabilidades, para $Z \sim N(0,1)$

i) $P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}4332$

	0	1	2	6
0,0				
0,1				
⋮				
1,5	0,4332			0,4406

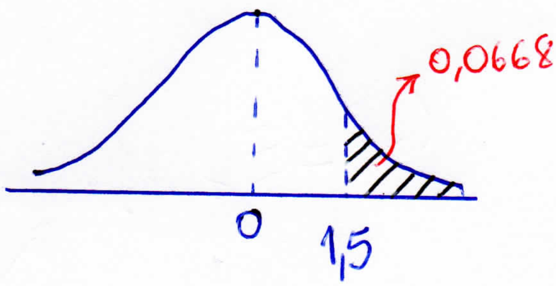


ii) $P(0 \leq Z \leq 1{,}56) = 0{,}4406$



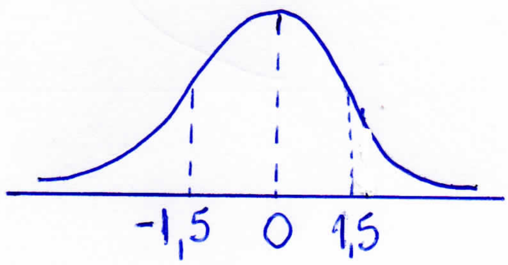
iii) $P(Z \geq 1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332$

$= 0{,}0668$

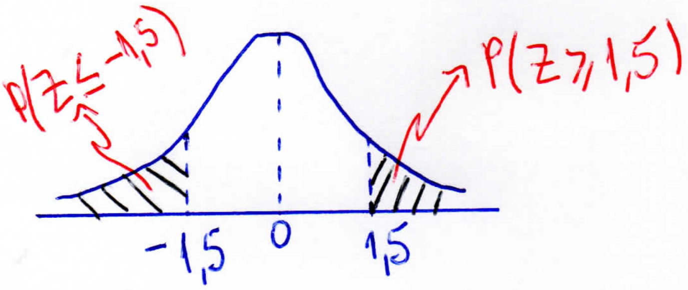


iv) $P(-1{,}5 \leq Z \leq 0)$

$= P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}4332$



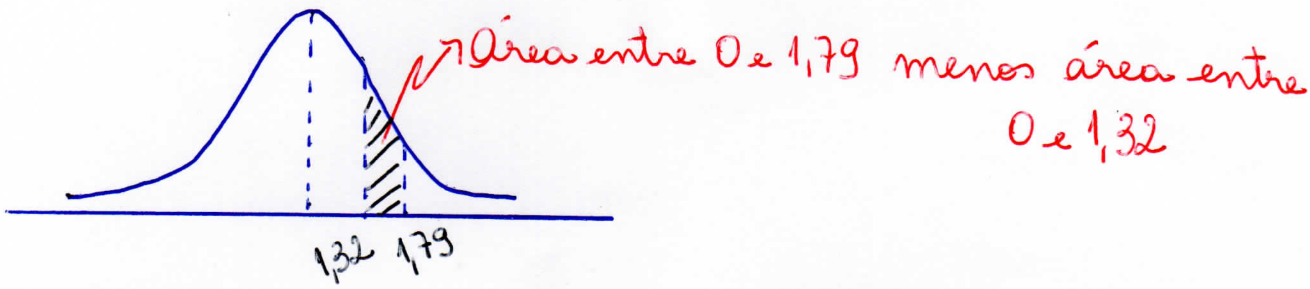
v) $P(Z \le -1{,}5) = P(Z \geq 1{,}5) = 0{,}0668$



vi) $P(Z \le 1{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4332 = 0{,}9332$

vii) $P(-1{,}5 \le Z \le 1{,}5) = 2P(0 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}8664$

viii) $P(1{,}32 \le Z \le 1{,}79) = 0{,}4633 - 0{,}4066 = 0{,}0567$



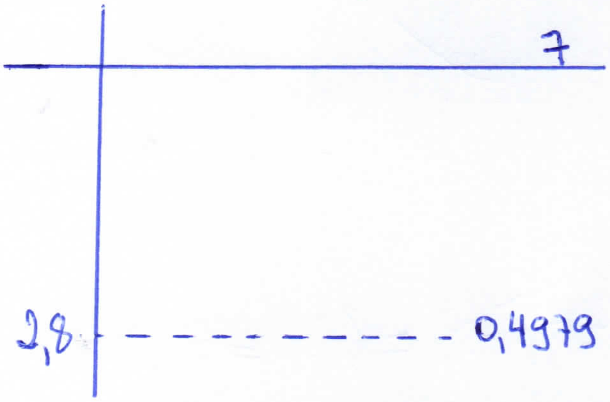
ix) $P(-1{,}79 \le Z \le -1{,}32) = P(1{,}32 \le Z \le 1{,}79) = 0{,}0567$

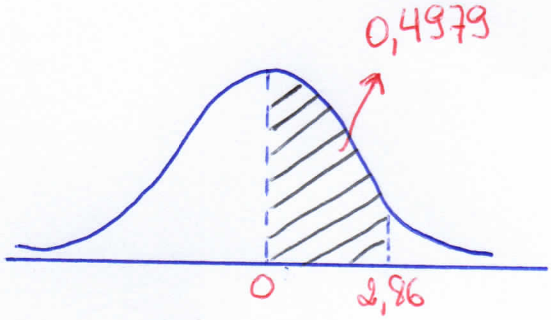
x) $P(-1 \le Z \le 2) = P(0 \le Z \le 2) + \underbrace{P(-1 \le Z \le 0)}_{P(0 \le Z \le 1)} =$

$= 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$

Se $Z \sim N(0,1)$ determine o valor z tal que

a) $P(0 \leq Z \leq z) = 0{,}4979$

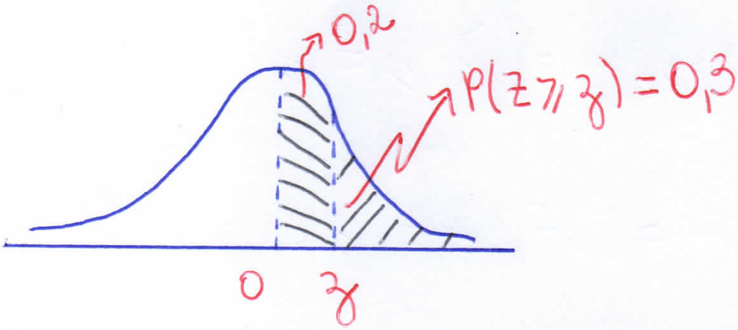




$z = 2{,}86$ ou $2{,}87$

b) $P(Z \geqslant z) = 0{,}3$

Aqui é necessário analisar se z é positivo ou negativo



$z > 0 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq z) = 0{,}2$

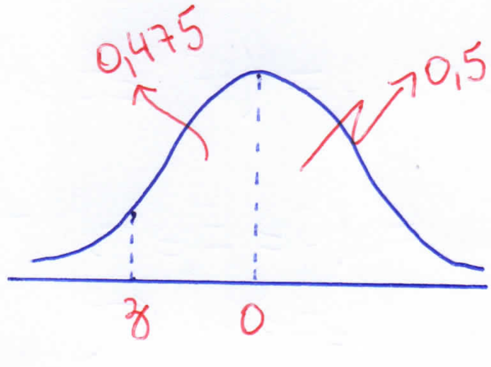
$z \simeq 0{,}52$

$P(Z \geqslant z) = 0{,}119 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq z) = 0{,}381 \Rightarrow z = 1{,}18$

$z > 0$

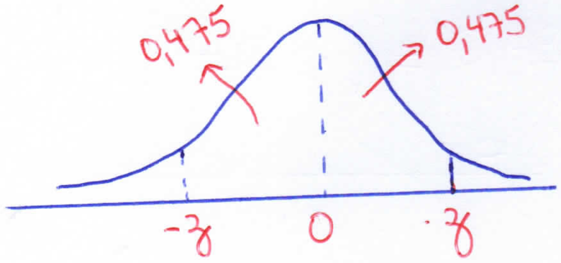
c) $P(Z \geqslant z) = 0{,}975$

Analisar o sinal de z



$z = -1{,}96$

d) $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}95$



$z = 1{,}96$

Cálculo de Probabilidades em uma distribuição normal qualquer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 > 0$ $-\infty < \mu < \infty$

Resultado

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Prova-se que $Z \sim N$.

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[\mu - \mu\right] = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Consequência: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow Z \sim N(0,1) \text{ tabelada}$$

Exemplo 6.9 Lima e Magalhães pag 200

X - tempo de cura de doentes submetidos a um tratamento (em dias)

tem distribuição Normal com média 15 e desvio padrão 2

a) Qual é a probabilidade de um paciente escolhido ao acaso apresentar tempo de cura inferior a 20 dias?

b) Qual é a proporção de pacientes com tempo de cura maior que 17 dias?

$X \sim N(15, 4) \quad \mu = 15 \quad \sigma^2 = 4$

a) $P(X < 20) = P\left(\frac{X-15}{2} < \frac{20-15}{2}\right) = P(Z < 2{,}5) =$

$Z \sim N(0,1)$

$= 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938$

b) $P(X > 17) = P\left(Z > \frac{17-15}{2}\right) = P(Z > 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

c) Em uma amostra de 100 pacientes escolhidos ao acaso, qual é o número esperado de pacientes com tempo de cura superior a 17 dias?

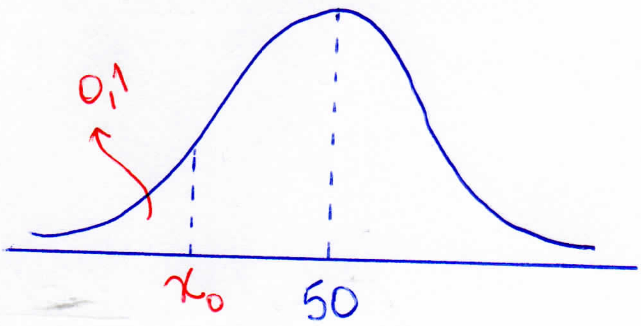
Y - nº de pacientes com tempo de cura > 17 dias

$Y \sim B(100, 0{,}1587) \quad E(Y) = np = 100 \cdot 0{,}1587 = 15{,}87$

$\simeq 16$

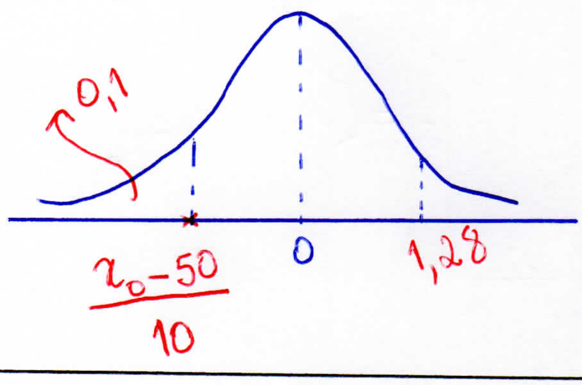
As notas de uma determinada população de estudantes têm distribuição normal com média 50 e desvio padrão 10. Participarão de um reforço os alunos com as 10% menores notas. Qual é a nota mínima para um estudante não participar do reforço?

X - nota $\quad X \sim N(50, 10^2)$



$P(X < x_0) = 0{,}10$

$$P\left(\frac{X-50}{10} < \frac{x_0-50}{10}\right) = P\left(Z < \frac{x_0-50}{10}\right) = 0{,}10$$



$$\frac{x_0-50}{10} = -1{,}28$$

$$x_0 = 50 - 12{,}8 = 37{,}2$$

Nota mínima: 37,2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\ }\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0{,}4772 = 0{,}9544$$

Propriedade da Distribuição Normal

Sejam $X_1, X_2 \dots X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, isto é, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Se $a_1, a_2 \dots a_n$ são constantes, então

$$W = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$E(W) = E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) =$$

$$a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \dots + a_n E(X_n) =$$

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i .$$

$$Var(W) = Var(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) \overset{\text{indep}}{=}$$

$$= Var(a_1 X_1) + Var(a_2 X_2) + \dots + Var(a_n X_n) =$$

$$= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Exemplo de Aplicação - Ex. 6.12 Magalhães e Lima pag 207

Admite-se que o volume de líquido em garrafas de refrigerante tem distribuição normal com média $\mu = 300$ ml e desvio padrão 25 ml.

O fabricante recebe uma fiscalização de modo que é multado se uma amostra de 10 garrafas fornecer conteúdo médio inferior a 290 ml.

Qual é a probabilidade do fabricante ser multado injustamente?

especificação: $X_i \sim N(300, 25^2)$ $i = 1, 2 \dots 10$

$W = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$

Multa: $\dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10} = \dfrac{W}{10} < 290 \iff W < 2900$

O fabricante é multado injustamente se $W < 2900$ quando $\underbrace{X_i \sim N(300, 25^2) \; i = 1, 2 \dots 10}_{\text{está dentro da especificação}}$. Neste caso

$W \sim N(3000, 10.25^2)$

$P(\text{multa injusta}) = P(W < 2900 \text{ quando } W \sim N(3000, 10.25^2))$

$= P\left(\dfrac{W - 3000}{\sqrt{10.25^2}} < \dfrac{2900 - 3000}{\sqrt{10.25^2}}\right) = P(Z < -1{,}26) = 0{,}1038$

$Z \sim N(0,1)$.

Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal

Consideremos um experimento com apenas dois resultados possíveis: Sucesso (S) e Fracasso (F) repetido n vezes de forma independente com $P(\text{Sucesso}) = p$ constante nas n repetições.

A variável aleatória discreta

X - nº de sucessos nas n repetições tem distribuição Binomial com parâmetros n e p.

$X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2 \dots n$$

Verifica-se que $E(X) = np$ $\quad Var(X) = np(1-p)$

Exemplo 6.11 pag 204 Magalhães e Lima

30% dos bancários têm problema de "stress". Em uma amostra casual simples com reposição de 200 bancários, qual é a probabilidade de se ter pelo menos 50 com essa doença?

X - nº de bancários com "stress" na amostra

$X \sim B(200, 0{,}3)$ $\quad p = P(S) = 0{,}3 = P(\text{"stress"})$

$$P(X \geq 50) = \sum_{K=50}^{200} P(X=K) = \sum_{K=50}^{200} \binom{200}{K} (0{,}3)^K (0{,}7)^{200-K}$$

Não há tabela para Binomial com $n = 200$.

Cálculo complicado via calculadora.

Comandos do R

Pelo R Commander seguir o menu

Distribuições → Distribuições Discretas →

Distribuição Binomial → Probabilidades da Binomial

Binomial Trials $\boxed{\text{digitar o } n}$

Probability of Sucess $\boxed{\text{digitar o } p}$

Esta probabilidade pode ser calculada através da aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal.

$X \sim B(n,p) \Rightarrow E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p)$

$P(a \leq X \leq b) \simeq P(a \leq Y \leq b)$, com

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$

Aproxima-se o cálculo de probabilidades na binomial pelo mesmo cálculo na distribuição normal com mesma média e variância da binomial.

$P(X \geqslant 50) \simeq P(Y \geqslant 50) = P\left(\frac{Y-60}{\sqrt{42}} \geqslant \frac{50-60}{\sqrt{42}}\right) =$

$E(X) = np = 200 \cdot 0{,}3 = 60 \quad Var(X) = np(1-p) =$

$= 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 42$

$Y \sim N(60, 42)$

$= P(Z \geqslant -1{,}54) = 0{,}9382.$

$Z \sim N(0,1)$

resultado exato $= 0{,}9484$

Obs:

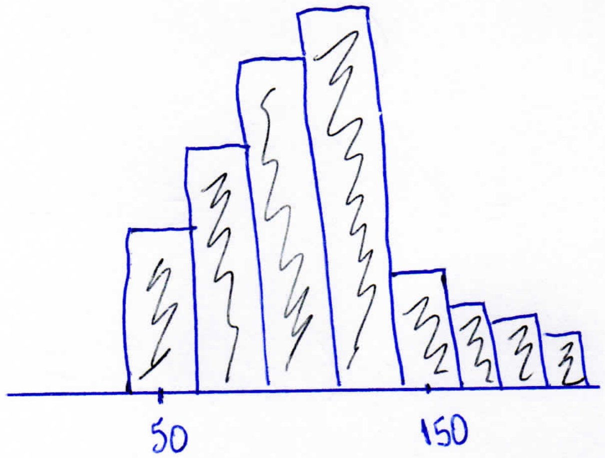
— A aproximação é boa quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

— A aproximação é válida somente para o cálculo de probabilidades em intervalos fechados.

$$P(X > 50) = P(X \geq 51) \simeq P\left(Z \geq \frac{51-60}{\sqrt{42}}\right).$$

X discreta, o próximo valor é 51

— A aproximação pode ser melhorada através da introdução da correção para a continuidade



$P(X \geq 50) \simeq P(Y \geq 49{,}5)$

$P(X \leq 150) \simeq P(Y \leq 150{,}5)$

$$P(80 \leq X \leq 92) \simeq P(79{,}5 \leq Y \leq 92{,}5)$$

$$P(46 < X < 62) = P(47 \leq X \leq 61) \simeq P(46{,}5 \leq X \leq 61{,}5)$$

X discreta

- A correção permite o cálculo de probabilidades para valores únicos.

$$P(X=50) = P(50 \leq X \leq 50) \simeq P(49{,}5 \leq Y \leq 50{,}5)$$

Na binomial é $\neq 0$

$$= P\left(\frac{49{,}5-60}{\sqrt{42}} \leq Z \leq \frac{50{,}5-60}{\sqrt{42}}\right) = 0{,}0182$$

Cálculo exato $= 0{,}019$

Exercícios – Serão resolvidos em 29/09

1) O tempo de vida útil de uma lavadora de roupas tem distribuição normal com média 3,1 anos e desvio padrão de 1,2 anos.

a) Qual deve ser o valor do tempo de garantia para que no máximo 15% das vendas originais exijam substituição?

b) Se esse tipo de lavadora tiver garantia de 1 ano, que porcentagem das vendas exigirá substituição?

2) Ex 33 – Capítulo 6 – Magalhães e Lima

3) Aproximação da Binomial pela Normal

Um sistema é formado por 100 componentes, cada um com confiabilidade (probabilidade de funcionar adequadamente em certo período) igual a 0,9. Se esses componentes funcionam de forma independente um do outro e se o sistema funcionar adequadamente se pelo menos 87 estiverem funcionando, qual é a confiabilidade do sistema? Usar a aproximação da binomial pela normal.

4) Uma prova é constituída de 20 testes com quatro alternativas cada. Um aluno não estudou a matéria e vai respondê-los ao acaso. Qual é a probabilidade de acertar 50% ou mais das questões?

Repetir para 40 testes com quatro alternativas.

Idem para 40 testes com cinco alternativas.