Aula 06 - Limites

Correção da atividade avaliativa de hoje:

Estudo o limite das funções a seguir, nos pontos indicados, usando a noção intuitiva de Limites.

$\frac{2}{2-3} = -2$

$\frac{2,9}{2,9-3} = -29$

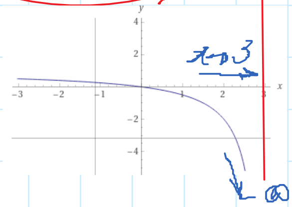
$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

(a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$, quando $x \to 3^-$

x	2	2,9	2,99	2,999
y	-2	-29	-299	-2999

$y \to -\infty$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty$

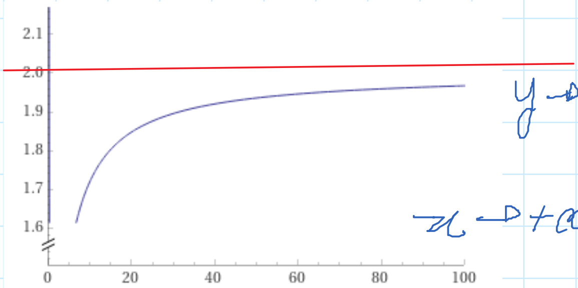


$\frac{6\cdot 10^2+2}{3\cdot 10^2+5\cdot 10} = 1,72$

(b) $f(x) = \frac{6x^2+2}{3x^2+5x}$, quando $x \to +\infty$

x	1	10	100	1000	10000	100000 $\to +\infty$
y	1	1,72	1,973	1,9967	1,9997	1,999967

$y \to 2$



$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2+2}{3x^2+5x} = 2$

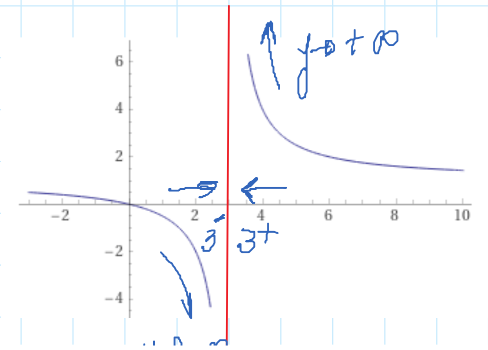
3,001
3,01
3,1
2,999
2,99
2,9
3

(a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$, quando $x \to 3^+$

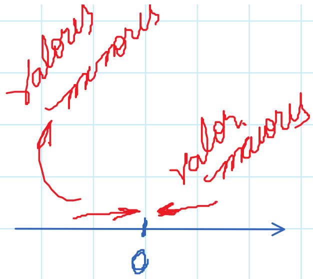
x	3,9	3,1	3,01	3,001	3,0001
y	4,33	31	301	3001	30001

$\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$

$y \to +\infty$



valores menores



Outro exemplo:

Utilizando a noção intuitiva de Limites, calcule o limite de $f(x) = \frac{1}{x}$ *quando* $x \to 0$.

e $x \to +\infty$
$x \to -\infty$

$x \to 0^+$ (pela direita)

x	0,5	0,1	0,01	0,001
y	2	10	100	1000

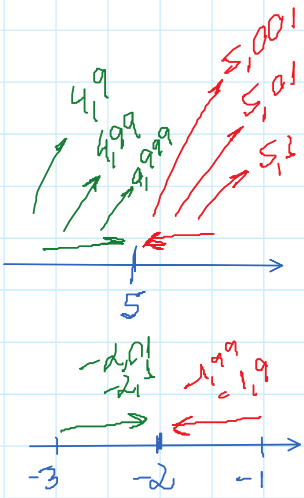
$y \to +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

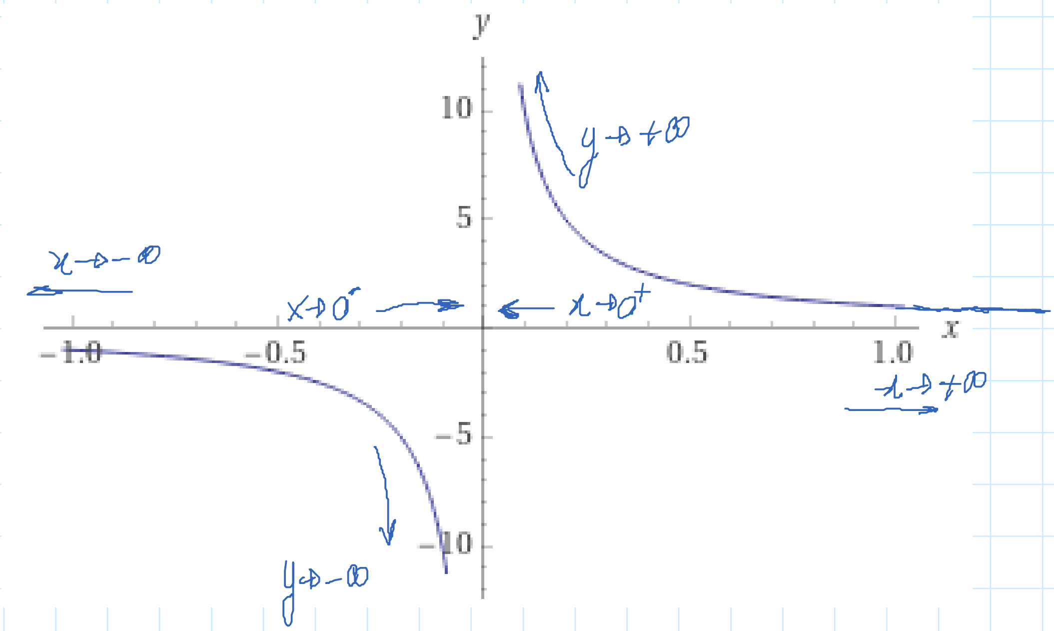
$x \to 0^-$ (pela esquerda)

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

x	-0,1	-0,01	-0,001
y	-10	-100	-1000

$y \to -\infty$





$x \to +\infty$

x	1	10	100	1000
y	1	0,1	0,01	0,001

$y \to 0^+$

y	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$

$y \to 0$

$x \to -\infty$

x	-1	-10	-100	-1000
y	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$

$y \to 0^-$

2.1. LIMITE

Conceito de Limite de uma função. Seja a função:

$$f : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

tende a $\to$

e considere a um ponto de acumulação do domínio D. Considere L um número real. Dizemos que L é o limite da função f quando x tende a a e denota-se:

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad f(x) \mapsto L \quad \text{quando} \quad x \mapsto a$$

se para qualquer vizinhança de L, $V(L)$, por menor que seja, sempre existir uma vizinhança de a, $V(a)$, no domínio D tal que $f(x) \in V(L)$ sempre que $x \in V(a)$, para todo $x \neq a$.

Definição 2.4 Propriedades dos limites. Considere $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \mapsto a} g(x) = L_2$ e $c \in \mathbb{R}$.

$x \to -2 \to x \to -2^+$, $x \to -2^-$

P1. $\lim\limits_{x \mapsto a}(mx + n) = ma + n, \quad m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$

$x \to 2 \to x \to 2^+$, $x \to 2^-$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x \to -2} 2x + 3 = 2(-2) + 3 = -1$ ✓

b) $\lim_{x \to 3} x^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$ ✓

P2. $\lim\limits_{x \mapsto a}(c) = c$;

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$

b) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

P3. $\lim\limits_{x\mapsto a} cf(x) = c.\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = cL_1;$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to -2} 2(x+3) = 2\lim\limits_{x\to -2} x+3 = 2(-2+3) = 2$

b) $\lim_{x\to 100} 3(\log x) = 3\lim\limits_{x\to 100} \log x = 3(\log 100) = 3.2 = 6$

P4. $\lim\limits_{x\mapsto a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\mapsto a} f(x) \pm \lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = L_1 \pm L_2;$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 5} 2x - 6x - 14 = \lim\limits_{x\to 5} 2x) - \lim\limits_{x\to 5} 6x) - \lim\limits_{x\to 5} 14$

$= 2.5) - 6.5) - 14 = 10 - 30 - 14 = -34$

b) $\lim_{x\to 100} 3(\log x) - \frac{1}{10}x = 3.\lim\limits_{x\to 100} \log x - \frac{1}{10}\lim\limits_{x\to 100} x$

$= 3.\log 100 - \frac{1}{10}.100$

$= 3.2 - 10 = -4$

P5. $\lim_{x\mapsto a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\mapsto a} f(x). \lim_{x\mapsto a} g(x) = L_1.L_2;$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 8}(-x+3)(x-5) = \left(\lim_{x\to 8} -x+3\right)\cdot\left(\lim_{x\to 8} x-5\right)$

$= (-8+3)\cdot(8-5)$

$= (-5)(3) = -15$

b) $\lim_{x\to 100} x(\log x)$

$= \lim_{x\to 100} x \cdot \lim_{x\to 100} \log x$

$= 100 \cdot 2 = 200$

P6. $\lim_{x\mapsto a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\mapsto a} f(x)}{\lim_{x\mapsto a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0);$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 1} x+3}{\lim_{x\to 1} x-2} = \frac{1+3}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-6}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to 0} x-6}{\lim_{x\to 0} x^2+2} = \frac{0-6}{0+2} = -3$

P7. $\lim_{x\mapsto a}[f(x)]^n = [\lim_{x\mapsto a} f(x)]^n = [L_1]^n;$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 1}(x+3)^2 = \left[\lim_{x\to 1} x+3\right]^2 = [1+3]^2 = 4^2 = 16$

a) $\lim_{x\to 1}(x+3)^2$ $= \left[\lim_{x\to 1} x+3\right]^2 = [1+3]^2 = 4^2 = 16$

b) $\lim_{x\to 1000}\left(\log x\right)^2$ $= \left[\lim_{x\to 1000} \log x\right]^2 = [3]^2 = 9$

P8. $\lim_{x\mapsto a}[\log(f(x))] = \log[\lim_{x\mapsto a} f(x)] = \log[L_1]\ \ (L_1 > 0);$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 9}\log\left(x^2+19\right)$ $= \log\left[\lim_{x\to 9} x^2+19\right] = \log[81+19] = \log 100 = 2$

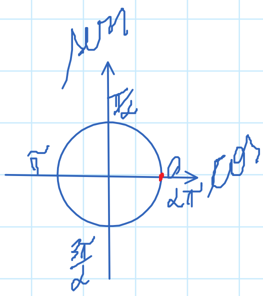
b) $\lim_{x\to 2}\log(-x+12)$ $= \log\left[\lim_{x\to 2}(-x+12)\right] = \log[10] = 1$

P9. $\lim_{x\mapsto a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\mapsto a} f(x)} = e^{L_1};$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 2} e^x$ $= e^{\lim_{x\to 2} x} = e^2$

b) $\lim_{x\to 0} e^{x+3}$ $= e^{\lim_{x\to 0} x+3} = e^{(0+3)} = e^3$



P10 $\lim_{x\mapsto a}\cos[f(x)] = \cos[\lim_{x\mapsto a} f(x)] = \cos[L_1].$

Exemplo:

a) $\lim \cos(\pi x)$ $= \cos\left[\lim \pi x\right] = \cos(2\pi) = 1$

Exemplo:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \cos \pi x = \cos\left[\lim\limits_{x\to 2} \pi x\right] = \cos(2\pi) = 1$

<u>Exercícios</u>:

Calcular os limites a seguir.

a. $\lim\limits_{x\mapsto 4}(x^2-5x+6)$

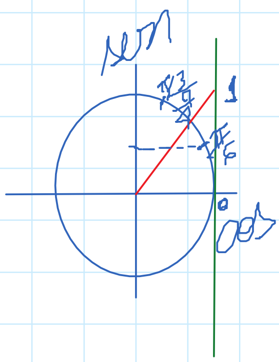
$= \lim\limits_{x\to 4} x^2 - \lim\limits_{x\to 4} 5x + \lim\limits_{x\to 4} 6$

$= 16 - 20 + 6 = 2$

ou $\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+6 = 4^2 - 5\cdot 4 + 6 = 16-20+6 = 2$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 2} \dfrac{x-3}{x^3-2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x-3}{\lim\limits_{x\to 2} x^3-2} = \dfrac{2-3}{8-2} = \dfrac{-1}{6}$

ou $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^3-2} = \dfrac{2-3}{2^3-2} = \dfrac{-1}{8-2} = \dfrac{-1}{6}$



c. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \exp(\tan(x)) = e^{\lim\limits_{x\to 0} tg(x)} = e^0 = 1$

d. $\lim\limits_{x\mapsto \pi/6} \log_2(\text{sen}(x)) = \log_2\left[\lim\limits_{x\to \pi/6} \text{sen}(x)\right] = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

d. $\lim\limits_{x\mapsto\pi/6} \log_2(\text{sen}(x))$

$$= \log_2\left[\lim_{x\to\pi/6} \text{sen}(x)\right] = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Definição 2.5 Expressões de indeterminação. Na aritmética dos limites as seguintes expressões são consideradas indeterminações:

1. $\infty - \infty$
2. $0.\infty$
3. $\frac{0}{0}$
4. $\frac{\infty}{\infty}$
5. 0^0
6. ∞^0
7. 1^∞

Do ponto de vista da análise quando qualquer uma destas 7 expressões ocorre nada se pode afirmar, a priori, sobre o limite da função.

Calcular os limites a seguir:

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{x^2}{2x^2}$ $= \frac{0}{0}$ indeterminação

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 7} \frac{x^2-49}{x-7}$ $= \frac{7^2-49}{7-7} = \frac{0}{0}$ indeterminação

$x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$

$$\lim_{x\to 7} \frac{\cancel{(x-7)}.(x+7)}{\cancel{x-7}} = \lim_{x\to 7} x+7 = 14$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ $= \frac{0}{0}$ indeterminação

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{}{x}$ $\quad 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{4}+x+\cancel{2\sqrt{4+x}}-\cancel{2\sqrt{4+x}}-\cancel{4}}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Definição 2.6 Limites Laterais. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, c). Se quando x tende para a por valores maiores do que a, a função tende ao número L, então L é chamado de limite lateral à direita e denota-se:

$$\lim_{x\mapsto a^+} f(x) = L$$

De modo análogo pode-se definir o limite lateral à esquerda, basta agora considerar a função definida em um intervalo aberto (d, a). Assim, L será o limite lateral à esquerda de $f(x)$ se quando x tender a a por valores menores, $f(x)$ se aproximar do número L, ou seja,

$$\lim_{x\mapsto a^-} f(x) = L$$

Calcular os limites laterais a seguir:

a. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} (2x^2+5)$ $= 2(2)^2+5 = 2\cdot 4+5 = 13$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$, sendo $y = f(x)$ dada pela lei:

$$f(x) : \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{(-x)}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \ldots \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, & se\ x<0 \\ 1, & se\ x=0 \\ -\dfrac{x}{x}, & se\ x>0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & se\ x<0 \\ 1, & se\ x=0 \\ -1, & se\ x>0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \leq 0 \\ -1, & se\ x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

Teorema 2.2 Existência do limite. O limite de uma função quando x tende a a existe e é L somente se existirem os limites laterais e ambos forem iguais a L.

Exemplo 2.10 Considere a função:

$$f(x) : \begin{cases} x+1 & \text{se } x<1; \\ -2x+4 & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

Existe limite de $f(x)$ quando x tende a 1?

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -2x+4 = -2+4 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x+1 = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

$$\therefore \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$x \to 1$

Esclarecendo uma dúvida:

Considere a função $f(x) = x^2 + 2x$.
Encontre $f \circ f$

$$f(f(x)) = (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)$$

$$= x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot 2x + 4x^2 + 2x^2 + 4x$$

$$= x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 4x$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$$