EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM 1 - TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O objetivo aqui é apresentar um esboço da demonstração do seguinte teorema fundamental

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\Phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \Phi(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que 'e solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x,y). \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1}$$

O primeiro passo é transformar a equação diferencial em outra *do tipo integal.*

Lema 2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, uma função contínua $\Phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial* (1) *no intervalo I se e somente se for uma solução da equação integral:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds, \tag{2}$$

para todo $x \in I$.

Demonstração: Teorema Fundamental do Cálculo. □

Esboço da demonstração do Teo 1: A ideia é usar o *Método das Aproximações sucessivas* .

Date: September 21, 2020.

Se definimos o **operador integral** $T : y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, d\, s$, então o que queremos encontrar é uma função Φ que seja um *ponto fixo* do operador T, ou seja, tal que $y(x) = Ty(x), \quad$ para todo x em algum intervalo I.

Inicialmente, tomamos $y = y_0$ a função constante, que tem a vantagem de satisfazer a condição inicial. Em seguida, consideramos a função $y_1(x)$ que é a transformada de y_0 por aplicação do operador integral

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, d\, s,$$

Se $y_1(x) = y_0$ em algum intervalo I contendo x_0, o problema está resolvido.

Se não, prosseguimos, definindo:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, d\, s.$$

e sucessivamente:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, d\, s.$$

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar duas coisas.

- O processo pode ser repetido para todo n.
- O processo converge para alguma função contínua Φ.

Se esses dois fatos puderem ser demonstrados, então teremos necessariamente

$y_n \to \Phi$ e $T(y_n) = y_{n+1} \to \Phi$ e da **continuidade do operador** T no espaço das funções definidas em algum intervalo I contendo x_0. $T(y_n) \to T(\Phi)$.

Por unicidade do limite, segue que $\Phi = T(\Phi)$, o que termina a demonstração. $\square$

Para preencher os detalhes técnicos precisamos, inicialmente, de algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 3. *Um espaço métrico é um conjunto M munido de uma distância entre seus elementos, isto é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, satisfazendo as propriedades:*

- $d(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in M$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in M$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in M$.

Dizemos que o espaço M é completo se toda sequência de Cauchy de elementos de M converge para um elemento de M.

Exemplo 4. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, então $M = \mathcal{C}(I) := \{y : I \to \mathbb{R}\,|\,y$ é contínua$\}$, munido da distância $d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$, sendo $||y|| := \{\sup |y(x)| \mid x \in I$.*

Definição 5. *Seja M um espaço métrico Dizemos que a transformação $T : M \to M$ é uma contração se existe $k < 1$ tal que $d(T(y_1), T(y_2)) \leq kd(y_1, y_2)$ ll $y_1, y_2 \in M$.*

Lema 6. *Se M é espaço métrico completo e $T : M \to M$ é uma contração então existe um único **ponto fixo** de T em M, isto é um ponto $\bar{y} \in M$ tal que $T(\bar{y}) = \bar{y}$.*

Prova: Seja y_0 um ponto qualquer de M. Definimos uma sequência y_n em M por $y_n = T(y_{n-1})$, $\forall n \geq 1$. Temos então $d(y_2, y_1) = d(T(y_1), T(y_0)) \leq kd(y_1, y_0)$, $d(y_3, y_2) = d(T(y_2), T(y_1)) \leq kd(y_2, y_1) \leq k^2 d(y_1, y_0)$, e assim por diante. Por indução segue que $d(y_n, y_{n-1}) \leq k^{n-1} d(y_1, y_0)$. Portanto, como $k < 1$, a soma $\sum_1^\infty d(y_n, y_{n-1})$ é convergente e $\sum_1^\infty d(y_n, y_{n-1}) \leq \sum_1^\infty k^{n-1} d(y_1, y_0) = d(y_1, y_0) \cdot \frac{1}{1-k}$. Em consequência, para todo número real positivo δ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\sum_N^\infty d(y_n, y_{n-1}) \leq \epsilon$. Como para todo $n \geq m \geq N$, temos

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) \cdots , d(y_{m+1}, y_m) \\ &\leq \sum_N^\infty d(y_n, y_{n-1}) \leq \delta \end{aligned}$$

segue que a sequência y_n é de Cauchy. Seja $\bar{y} = \lim_{n\to\infty} y_n$. Afirmo que $\bar{y}$ é o único ponto fixo de T em M.

De fato, temos $d(T(\bar{y}), y_n) = d(T(\bar{y}), T(y_{n-1})| \leq kd(\bar{y}, y_{n_1}) \to 0$ e segue que $\bar{y} = \lim_{n\to\infty} T(y_n)$. Por unicidade do limite concluimos que $T(\bar{y}) = \bar{y}$.

Agora, se $y^* \in M$ é ponto fixo, então: $d(\bar{y}, y^*) = d(T(\bar{y}), T(y^*)) \leq kd(\bar{y}, y^*)$. Como $k < 1$, concluímos que $\bar{y} = y^*$. $\square$

Observação 7. *Durante a prova do Lema, mostramos também que a sequência das* aproximações sucessivas $y_n = T(y_{n-1}($ *converge par o ponto fixo* $\bar{y}$*, para qualquer valor inicial* y_0*.*

Para aplicar esses resultados ao problema (1) vamos restingir o problema a um retângulo fechado R em torno do ponto (x_0, y_0) contido em Ω.

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b.\}$$

Lema 8. *Existem constantes* M *e* L*, tais que* $|f(x, y)| \leq M$ *e* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *para quaisquer* (x, y)*,* (x, y_1) *e* (x, y_2) *no retângulo* R*.*

Prova: A limitação de f em conjuntos compactos é uma consequência de sua continuidade conhecida como *Teorema de Weirstrass* , que não vamos demonstrar aqui. Por outro lado, do Teorema do Valor Médio, temos

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)||y_1 - y_2|,$$

sendo ξ um número entre y_1 e y_2. Sendo $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua, sua limitação em R também segue do Teorema de Weirstrass. $\square$

Observação 9. *Uma função satisfazendo real g a propriedade $|g(y_1) - g(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ $\forall y_1, y_2$ em $S \subset \mathbb{R}$ é dita* Lipschitziana *em S, com constante de Lipschitz L.*

Lema 10. *Seja $0 < \alpha \leq a$ e $S := \{y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R} \mid |y(x) - y_0| \leq b\}$. Então S é um espaço métrico completo com a distância induzida de $\mathbb{C}([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$.*
Prova: *Basta observar que S é subconjunto fechado de $\mathbb{C}([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$.* $\square$

Consideremos novamente o operador T, definido por $y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, d\, s$ em $\mathbb{C}(I)$, $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
Em vista do Lema 2 para terminar a demonstração, basta mostrar que o operador é uma conração em $S := \{y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R} \mid |y(x) - y_0| \leq b\}$, para α convenientemente escolhido. Este é o conteúdo do próximo resultado.

Lema 11. *Sejam M e L as constantes dadas no Lema 8. Então, se $\alpha \leq \min\{\frac{b}{M}, a\} e \alpha L < 1$, o operador T é uma conração em $S := \{y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R} \mid |y(x) - y_0| \leq b\}$.*

Prova: Se $y \in S$, então temos:
$|T(y)(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|\, d\, s \leq M|x - x_0| \leq \alpha M \leq b$.
Portanto T é uma aplicação de S em S para todo $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Além disso, se $y_1, y_2 \in S$

$$\begin{aligned}
|Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \, d\, s \\
&\leq \int_{x_0}^{x} L|y_1(s) - y_2(s)| \, d\, s \\
&\leq \int_{x_0}^{x} Ld(y_1, y_2) \, d\, s \\
&\leq \alpha L d(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

Portanto $|Ty_1(x) - Ty_2(x)| \leq \alpha L d(y_1, y_2)$ $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \Rightarrow d(Ty_1, Ty_2) \leq \alpha L d(y_1, y_2)$. $\square$