

Capítulo 3

Desempenho Nominal em Malha Fechada

Neste capítulo, veremos como um sistema de controle em malha fechada pode ser especificado no domínio da frequência, usando-se os diagramas de Bode. Veremos como o gráfico de Nyquist se relaciona com os diagramas de Bode de malha fechada e com os seus principais parâmetros de desempenho. Veremos também como o projeto olhando-se para a função de transferência em malha aberta (loop shaping) pode ser realizado. Por fim, veremos como a norma H_∞ , que não será introduzida de forma rigorosa por enquanto, pode ser usada para analisar e especificar desempenho.

3.1 Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist

Curvas M e N

Como já foi visto, o gráfico de Nyquist é a curva no plano \mathbb{C} descrita pela função complexa $G(j\omega)K(j\omega)$. Entretanto, podemos também olhar para a função $F(j\omega) = 1 + G(j\omega)K(j\omega)$, que é um vetor partindo do ponto -1 , conform pode ser visto na Fig. 3.1. Pode-se então escrever a função de transferência em malha fechada da forma:

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}}$$

Gostaríamos de saber quais são os lugares geométricos (LG) onde o vetor $T(j\omega)$ tem módulo constante e os LG onde $T(j\omega)$ tem fase constante. Para tanto, escrevendo $G(j\omega)H(j\omega)$ na forma cartesiana, ou seja, $GH = X + jY$, pode-se escrever os vetores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OP} que são utilizados para formar os lugares geométricos. A curva do LG onde o módulo de malha fechada é constante e igual a M é dado por:

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

que após algumas manipulações algébricas, vai resultar em:

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

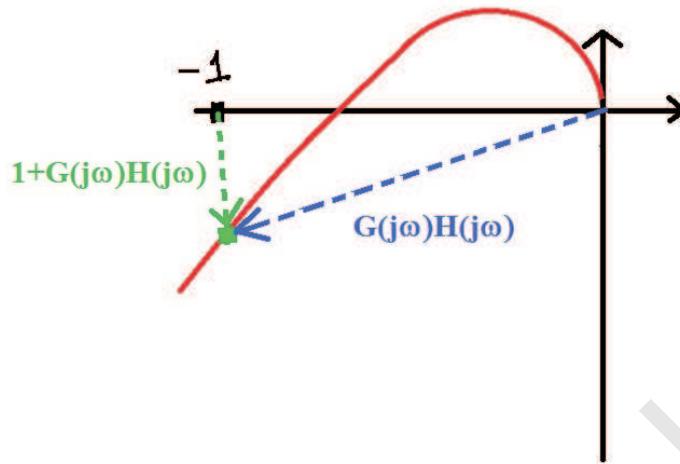


Figura 3.1: Vetores

que é uma circunferência. Para cada valor diferente de M , corresponde uma circunferência de centro e raio diferentes, conforme mostrado na Fig. 3.2, sendo as curvas pontilhadas azuis.

Para encontrar as curvas de fase constante, basta tirar a fase de $T(j\omega)$ e igualar a uma constante N arbitrária, o que resulta em:

$$\angle T(j\omega) = \angle(X + jY) - \angle(1 + X + jY) = \alpha$$

onde $N = \tan \alpha$. Usando-se uma conhecida identidade trigonométrica da função tangente, tem-se que:

$$N = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

Manipulando-se adequadamente esta identidade, chega-se a:

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

que fornece uma circunferência para cada valor diferente de N . Entretanto, como $N = \tan \alpha$, cada vez que α completa uma volta, os valores de N se repetem.

Na figura 3.2 estão plotadas, em vermelho, as curvas para α constante, mas não as circunferências inteiras, devido à periodicidade acima citada. As curvas correspondentes a $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$ correspondem a trechos circunferências de raio infinito e centradas no infinito. O trecho da curva de $\alpha = 180^\circ$ é simplesmente o segmento do eixo real que liga a origem ao ponto -1 , que também corresponde a -180° . O trecho correspondente a $\alpha = 0^\circ$ é o trecho que liga $-\infty$ a -1 e o trecho que liga 0 a $+\infty$. As curvas que estão plotadas correspondem somente a alguns valores de α entre $\alpha = -180^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$.

3.2 Função Sensibilidade Complementar T a Partir do Gráfico de Nyquist e das Curvas M e N

É possível ter-se uma ideia do formato dos diagramas de Bode em malha fechada a partir do diagrama de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$ plotado contra as curvas M e N , que fornecem ao

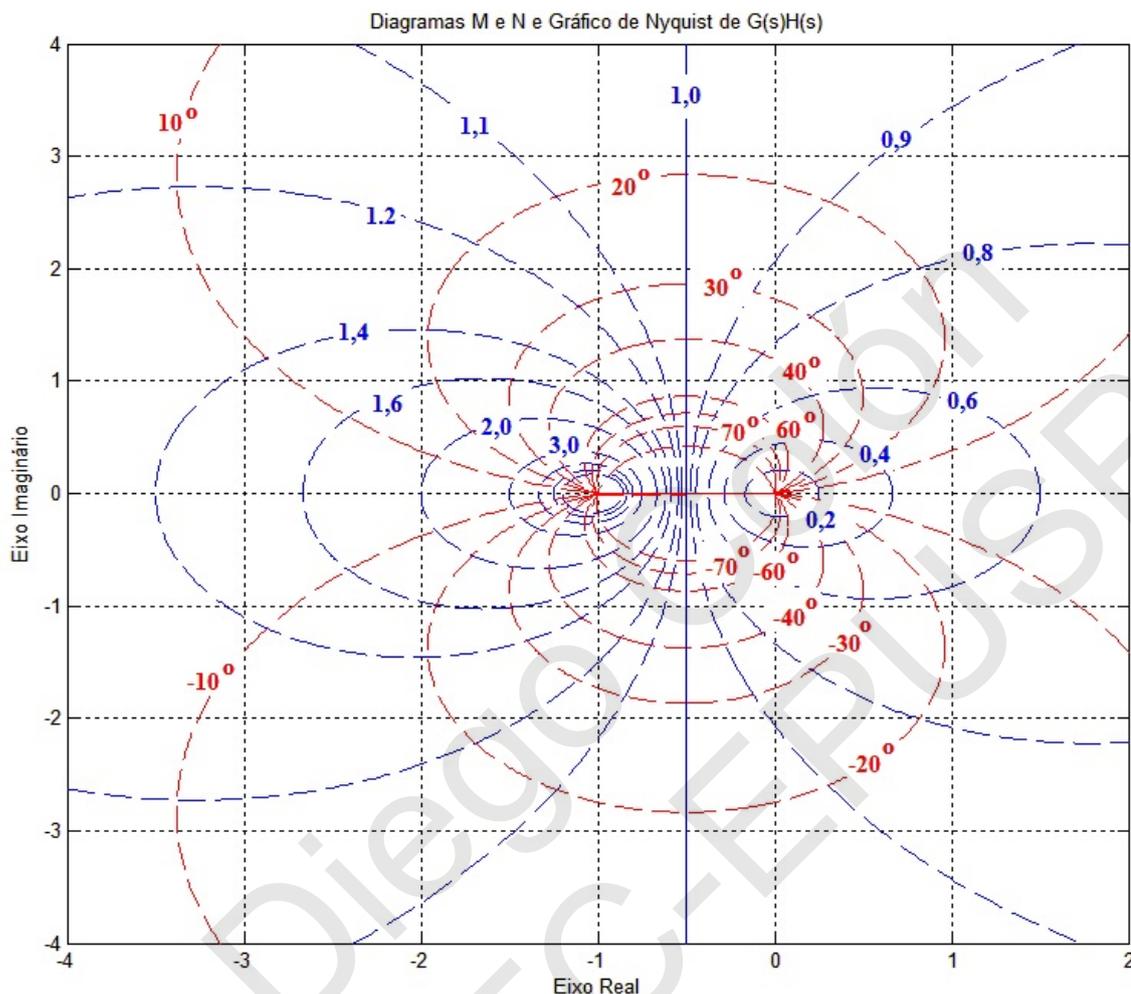


Figura 3.2: Curvas M e N

projetista toda a informação necessária sobre a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada, além de permitir saber o que as modificações em GK (advindas de mudanças no controlador) vão causar no sistema, tanto na estabilidade quanto no desempenho. Na Fig. 3.3, tem-se alguns diagramas de Nyquist para sistemas do tipo 0, ou seja, sistemas sem nenhum integrador em $L = GK$ (lado esquerdo), e um esboço dos correspondentes diagramas de Bode de malha fechada do lado direito. Passemos agora para a análise destes gráficos:

Baixas Frequências

Lembremos que $T(j\omega) = L(j\omega)/(1 + L(j\omega))$. Como se pode ver na Fig. 3.3 do lado esquerdo, para a frequência $\omega = 0$, as três curvas partem do semi-eixo real positivo. O LG de fase constante em malha fechada (em vermelho tracejado) que está em cima deste eixo é o correspondente a zero graus de MF. Ou seja, a defasagem é zero em MF para $\omega = 0$, e isso não muda se multiplicarmos a função $L(j\omega)$ por um ganho $K > 0$. Por outro lado, quanto maior for $|L(0)|$, o LG de ganho constante em MF (em azul tracejado) que

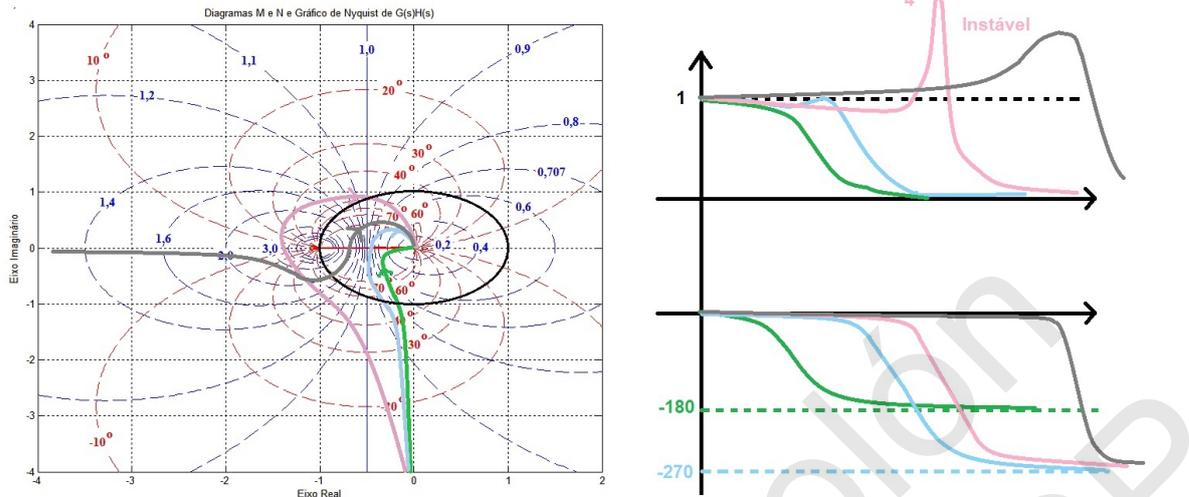


Figura 3.4: Curvas M e N e Nyquist para Sistemas Tipo 1

e acaba assumindo valores até $90 = -270$ graus. De fato, como $|L(j\omega)| \rightarrow 0$, tem-se que $|L(j\omega) + 1| \rightarrow 1$, o que significa que $|T(j\omega)| \simeq |L(j\omega)|$. Da mesma forma, tem-se que $\angle T(j\omega) = \angle L(j\omega) - \angle(L(j\omega) + 1) \simeq \angle L(j\omega) - \angle 1 \simeq \angle L(j\omega)$. Para os sistemas na Fig. 3.3, o comportamento é semelhante nas altas e independe do tipo. Já para os sistemas na Fig. 3.4, tem-se que esta última fórmula continua válida (de fato, ela independe do número de polos e zeros na origem).

Vê-se que os diagramas de Bode de malha fechada apresentam bastante similaridade um com o outro. No caso do diagrama de módulo, assumem valores tipicamente próximos de 1 nas baixas frequências (se queremos erro estacionário pequeno, isto acaba sendo uma necessidade), tem ganho próximo de zero nas altas frequências, e a maior diversidade ocorre justamente nas médias frequências, pois pode ou não haver picos de ganho (conhecidos como *picos de ressonância*). Além disso, importa também os valores da faixa de frequências médias e a inclinação do gráfico de módulo. No caso da fase, deve ser próxima de zero nas baixas frequências (o comportamento nas altas é bem variado, dependendo do número de pólos menos o número de zeros em malha aberta).

Médias Frequências

Nesta faixa de frequências, temos os valores ω_{180} e ω_c . De modo a ter margem de ganho positiva, devemos ter $|L(\omega_{180})| < 1$. Para fazer uma melhor análise nas médias frequências, observemos a Fig. 3.5. Podemos definir a *Banda Passante* da função T como sendo a frequência ω_{BT} onde $|T(j\omega_{BT})| = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ e a *Banda Passante* da função S como sendo a frequência ω_B onde $|S(j\omega_B)| = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$. Tipicamente $\omega_B < \omega_c < \omega_{BT}$. Em controle clássico, quanto maior fosse ω_{BT} melhor seria a capacidade do sistema seguir um sinal de referência, pois significa que, se o sistema fosse projetado de forma que $|T(0)| \simeq 1$, a faixa de baixas frequências, onde $|T(j\omega)| \simeq 1$ e $\angle T(j\omega) \simeq 0$ seria bastante ampla. Para controle H_∞ , veremos que o mais adequado é olhar para ω_B , pois para valores abaixo desta frequência $|S(j\omega)| \simeq 0$ (caso $|T(j\omega)| \simeq 1$), o que significa também bom segmento de referência, além de boa rejeição a distúrbios. Como visto nas figuras anteriores, o módulo de $T(j\omega)$ pode ou não ter um pico, conhecido como *pico de ressonância*. A frequência onde ocorre este pico é conhecida como *frequência de ressonância* ω_{ress} . O pico ocorre se $L(j\omega)$ tangencia um dos LG de módulo constante em MF (e a frequência onde isto ocorre

é ω_{ress}). Sabemos que a amplitude do pico de ressonância está ligada ao valor do máximo sobressinal da resposta ao degrau. De fato, se o sistema em malha fechada possui um par de pólos dominantes complexos conjugados (o que geralmente é o caso, pois o projetista cuida para que isso aconteça), o valor do pico de ressonância é dado por:

$$M_{\text{ress}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

sendo que $0 < \xi < 0.707$. Neste caso, $\omega_{\text{ress}} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$. Sendo assim, pode-se usar as fórmulas dos parâmetros relacionados à resposta ao degrau apresentados na Fig. 3.6, que estão ligados ao desempenho do sistema. Tais parâmetros são: tempo de subida $t_r = (\pi - \beta)/\omega_d$, tempo de pico $t_p = \pi/\omega_d$, tempos de acomodação de 2%, dado por $t_a(2\%) = 4/\xi\omega_n$, tempo de acomodação de 5%, dado por $t_a(5\%) = 3/\xi\omega_n$ e porcentagem de sobressinal $M_p = 100 \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$. Pode-se mostrar que quanto maior for M_{ress} , maior será a porcentagem de sobressinal.

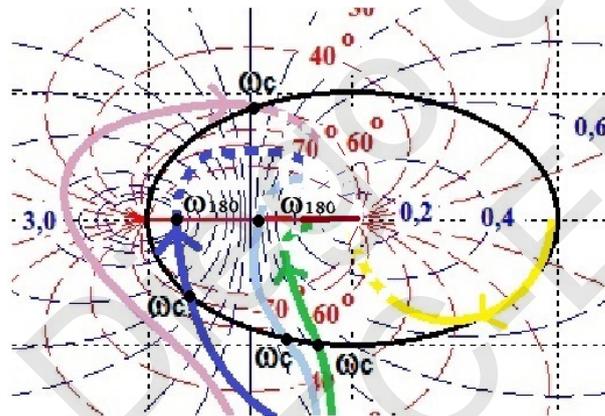


Figura 3.5: Comportamento em Médias Frequências

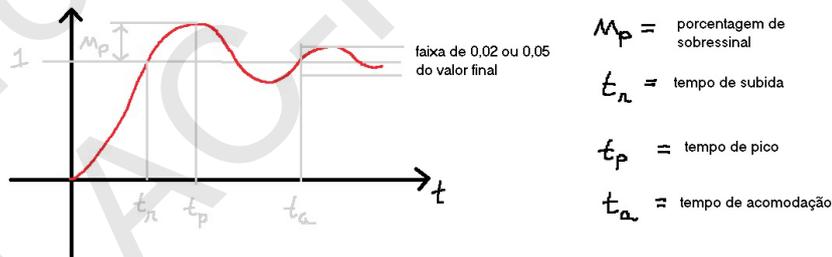


Figura 3.6: Comportamento em Médias Frequências

Evidentemente, é possível avaliar a robustez olhando-se para as médias frequências, pois é nesta faixa que olhamos margem de ganho e margem de fase. Podemos então dizer que as médias frequências governam o desempenho em regime transitório e a robustez de estabilidade, enquanto as baixas frequências governam o regime estacionário, e as altas a rejeição ao ruído de medida.

3.3 Projeto Loop Shaping

Considerando-se as análises feitas na seção anterior, concluímos que os diagramas de Bode de $L(j\omega)$, conhecida como *função de transferência em malha aberta*, ou *loop transfer function*, podem ser usados como ferramentas de projeto de sistemas de controle em malha fechada. O formato adequado de $L(j\omega)$ dará um formato adequado para $T(j\omega)$ e conseqüentemente $S(j\omega)$. Esta técnica é conhecida como *Loop Shaping*, pois procura dar um formato adequado para $|L(j\omega)|$ e $\angle L(j\omega)$ de forma a garantir bom desempenho e robustez ao sistema. Devemos então escolher um controlador $K(s)$ tal que proveja o sistema com as seguintes propriedades:

1. **baixas frequências:** $|L(j\omega)| = |G(j\omega)K(j\omega)|$ deve ser grande o suficiente de forma a ter $|T(j\omega)| = |L(j\omega)|/|1+L(j\omega)|$ próximo de 1, o que garante também $\angle T(j\omega) \simeq 0$ nesta faixa. O erro estacionário será pequeno e referências com espectro concentrado nesta faixa serão bem seguidas. Como $|S(j\omega)|$ será pequena nesta faixa, distúrbios com espectros concentrados nesta faixa serão bem rejeitados. Para se conseguir tal efeito, pode-se fazer o ganho de $K(j\omega)$ grande ou introduzir integradores. Entretanto, cada integrador introduzindo em K significa um atraso adicional de fase de -90° , o que torna mais difícil estabilizar o sistema ou garantir uma boa robustez de estabilidade.
2. **médias frequências:** quanto maior for ω_{BT} , maior será a faixa de baixas frequências, o que garante melhor *fidelidade* no seguimento de referências e rejeição de distúrbios. Isto tipicamente se consegue com aumento de ganho e/ou redes de avanço de fase. A presença de picos de ressonância implicará respostas transitórias piores, pois vimos que a amplitude deste está positivamente relacionada com o máximo sobressinal (valores altos de sobressinal são indesejáveis). Da mesma forma, a robustez é menor quando há altos picos de ressonância, pois significa que os polos dominantes em MF estão próximos do eixo imaginário. Tipicamente, queremos que $M_{\text{ress}} < 1.25$, o que é equivalente a 2dB . Em projetos clássicos, procura-se garantir que $30^\circ < MF < 60^\circ$ e $MG > 6\text{dB}$ para se ter bom desempenho e robustez.
3. **altas frequências:** Em altas frequências, tem-se que tipicamente $|T(j\omega)|$ cai para zero. Entretanto, pode ser desejável que essa queda se dê rapidamente em relação à frequência, o que significa uma maior número de pólos de MF em relação ao número de zeros. Isto é desejável para que haja boa rejeição de ruído de medida. Para conseguir isso, como $T(j\omega) \simeq L(j\omega)$ nesta faixa, quanto maior o saldo de pólos de $K(j\omega)$, maior é essa queda. Entretanto, quanto maior o número de pólos de $K(s)$ (contando-se aí os integradores), maior o atraso de fase nas altas frequências, o que dificulta a estabilização e/ou robustez de estabilidade do sistema. Tipicamente um bom compromisso é ter uma queda de -20 dB/década nas frequências médias.

Não há controlador $K(s)$ perfeito! Deve-se achar um compromisso entre bom desempenho (em regime permanente e transitório) e robustez, além de boa capacidade de rejeitar distúrbios e ruídos de medida. Veremos ainda que há mais restrições que deveriam ser respeitadas, que normalmente não são levadas adequadamente em conta no projeto Loop Shaping clássico. A mais importante é a energia do sinal de controle $u(t)$ (essa é entretanto levada em conta no projeto H_∞).

3.4 Preparação para Controle H_∞

3.4.1 Desempenho Usando Funções S e T

Na Fig. 3.7, mostra-se os diagramas de Bode de módulo das funções de malha fechada T e S . Já sabemos quais as propriedades que $|T|$ deve ter para que haja bom desempenho. De fato, para que haja bom seguimento de referência, ω_{BT} deve ser grande o suficiente. Cabe agora fazer a uma das mais importantes definições de controle H_∞ , que é:

$$\|T\|_\infty = \max_{\omega} |T(j\omega)|$$

que é a chamada *norma* H_∞ da função de transferência T . Porque ela é uma norma (no sentido da álgebra linear) será visto mais adiante, mas o mais importante no momento é que ela é igual ao valor máximo que o módulo atinge, ou seja, é igual ao pico de ressonância neste caso. Deste modo, para que o sistema tenha uma boa robustez e desempenho, já vimos que tipicamente fazemos $\|T\|_\infty < 1.25$.

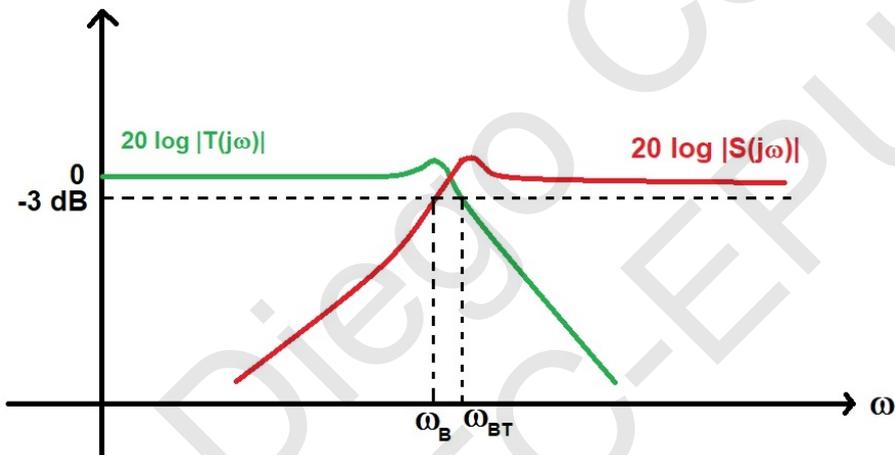


Figura 3.7: Comportamento em Médias Frequências

Podemos também definir $\|S\|_\infty$ da mesma maneira, que é o pico de ressonância da função S . Como:

$$\|S\| - |T| \leq |S + T| = 1$$

para qualquer frequência, tem-se que se $\|T\|_\infty$ é grande, então $\|S\|_\infty$ também deve ser. Como já foi dito, em controle H_∞ é preferível se utilizar S no lugar de T . Deste modo, podemos traduzir as propriedades desejáveis que o sistema deve ter, de acordo com o projeto Loop Shaping, para a função S da seguinte forma:

1. **Baixas frequências:** $|S(j\omega)| \simeq 0$ para as baixas frequências a fim de ter bom seguimento de referência e rejeição de distúrbios;
2. **Médias frequências:** ω_B deve ser grande o suficiente para se ter boa fidelidade, ou seja, seguimento de referência. $\|S\|_\infty$ deve ser menor 2 (6 dB) para se ter boa robustez e pequeno sobressinal. Para se ter um bom compromisso entre rejeição de ruído de medida e robustez, a queda nas médias deve ser em torno de -20 dB/década.
3. **Altas frequências:** Quanto maior a queda nas altas, o efeito do ruído de medida é menor. Porém, tem-se que respeitar o compromisso nas frequências médias descrito acima.

No próximo capítulo, iremos introduzir os primeiros problemas de controle H_∞ a partir dos conceitos apresentados até agora. Em particular, veremos que o desempenho é sempre especificado em termos da função S . Estes primeiros problemas serão definidos de forma rigorosa como problemas de otimização.

Prof. Diego Colón
LAC-PTC-EPUSP

Referências Bibliográficas

- [CBdR⁺14] Diego Colón, José M. Balthazar, Célia A. dos Reis, Átila M. Bueno, Ivando S. Diniz, and Suélia de S. R. F. Rosa. Control design and robustness analysis of a ball and plate system by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:226–234, 2014.
- [CCKB17] Diego Colón, Americo Cunha, Stefan Kaczmarczyk, and José M. Balthazar. On dynamic analysis and control of an elevator system using polynomial chaos and karhunen-loève approaches. *Procedia Engineering*, 199:1629 – 1634, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2017.
- [CFB⁺14] Diego Colón, Murillo A. S. Ferreira, José M. Balthazar, Átila M. Bueno, and Suélia de S. R. F. Rosa. Robustness analysis of an air heating plant and control law by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:235–244, 2014.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [SMP06] A. Smith, A. Monti, and F. Ponci. Robust controller using polynomial chaos theory. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 5, pages 2511–2517, Oct 2006.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.

- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

Prof. Diego Colón
LAC-PTC-EPUSP