Matemática Aplicada à Economia II – Lista 1 – Equações Diferenciais e Equações de Diferenças Simultâneas

1) Resolva os dois sistemas de equações de diferenças seguintes:

a) $\begin{cases} x_{t+1} + x_t + 2y_t = 24 \\ y_{t+1} + 2x_t - 2y_t = 9 \end{cases}$ $\quad (com\ x_0 = 10\ e\ y_0 = 9)$

b) $\begin{cases} x_{t+1} - x_t - \frac{1}{3}y_t = -1 \\ x_{t+1} + y_{t+1} - \frac{1}{6}y_t = 8\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad (com\ x_0 = 5\ e\ y_0 = 4)$

2) Resolva os dois sistemas de equações diferenciais seguintes:

a) $\begin{cases} x'(t) - x(t) - 12y(t) = -60 \\ y'(t) + x(t) + 6y(t) = 36 \end{cases}$ $\quad [com\ x(0) = 13\ e\ y(0) = 4]$

b) $\begin{cases} x'(t) - 2x(t) + 3y(t) = 10 \\ y'(t) - x(t) + 2y(t) = 9 \end{cases}$ $\quad [com\ x(0) = 8\ e\ y(0) = 5]$

3) a) Mostre que o sistema $\begin{bmatrix} \delta - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \beta - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pode ser escrito, com maior concisão, como $(\delta I - A)\beta = u$

b) Dos cinco símbolos utilizados, quais são escalares? Quais são vetores? Quais são matrizes?

c) Escreva a solução para β em forma de matriz, supondo que $(\delta I - A)$ é invertível.

4) a) Mostre que $\begin{bmatrix} \rho + 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \rho + 1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ pode ser escrito, com maior concisão, como $(\rho I + I - A)\beta = \lambda$

b) Dos cinco símbolos utilizados, quais são escalares? Quais são vetores? Quais são matrizes?

c) Escreva a solução para β em forma de matriz, supondo que $(\rho I + I - A)$ é invertível.

5) Dados $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$ $e\ d_t = \begin{bmatrix} (\frac{12}{10})^t \\ (\frac{12}{10})^t \end{bmatrix}$ para o modelo de insumo-produção de tempo discreto com defasagem de tempo , encontre (a) as soluções particulares; (b) as funções complementares; e (c) as trajetórias temporais definidas, supondo produções iniciais $x_{1,0} = \frac{187}{39}\ e\ x_{2,0} = \frac{72}{13}$.

6) Dados $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$ $e\ d = \begin{bmatrix} e^{t/10} \\ 2e^{t/10} \end{bmatrix}$ para o modelo de insumo-produção de tempo contínuo com ajuste de produção, encontre (a) as soluções particulares; (b) as funções complementares; e (c) as trajetórias temporais definidas, supondo as condições iniciais $x_1(0) = \frac{53}{6}\ e\ x_2(0) = \frac{25}{6}$.

7) Em um mercado de n mercadorias, todas as $Q_{di}\ e\ Q_{si}\ (com\ i = 1, 2, \dots, n)$ podem ser consideradas como funções dos preços $P_1, \dots, P_n$, assim como o excesso de demanda para cada mercadoria $E_i \equiv Q_{di} - Q_{si}$. Supondo linearidade, podemos escrever

$$E_1 = a_{10} + a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \cdots + a_{1n}P_n$$
$$E_2 = a_{20} + a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \cdots + a_{2n}P_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_n = a_{n0} + a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + \cdots + a_{nn}P_n$$

Ou, em notação matricial, $E = a + AP$

a) O que estes últimos quatro símbolos representam – escalares, vetores ou matrizes? Quais são suas respectivas dimensões?

b) Considere que todos os preços são funções de tempo e suponha que $\frac{dP_i}{dt} = \alpha_i E_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$. Qual é a interpretação econômica deste último conjunto de equações?

c) Escreva as equações diferenciais mostrando que cada $\frac{dP_i}{dt}$ é uma função linear dos n preços.

d) Mostre que, se denotarmos por P' o vetor coluna $n \times 1$ das derivadas $\frac{dP_i}{dt}$, e se denotarmos por α uma matriz diagonal $n \times n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$(nessa ordem) na diagonal principal e zeros em todos os outros lugares, podemos escrever o sistema de equações diferenciais precedente em notação matricial como $P' - \alpha AP = \alpha a$.

8) Para o mercado de n mercadorias do problema anterior, a versão de tempo discreto consistiria em um conjunto de equações de diferenças $\Delta P_{i,t} = \alpha_i E_{i,t}\ (i = 1, 2, \dots, n)$, onde $E_{i,t} = a_{i0} + a_{i1}P_{1,t} + a_{i2}P_{2,t} + \cdots + a_{in}P_{n,t}$.

a) Escreva o sistema de equações de excesso de demanda e mostre que ele pode ser expresso em notação matricial como $E_t = a + AP_t$.

b) Mostre que as equações de ajuste preço podem ser escritas como $P_{t+1} - P_t = \alpha E_t$, onde α é a matriz diagonal $n \times n$ definida no problema anterior.

c) Mostre que o sistema de equação de diferenças do presente modelo de tempo discreto pode ser expresso na forma $P_{t+1} - (I + \alpha A)P_t = \alpha a$.

9) Encontre as trajetórias temporais (soluções gerais) de π e U, dados:

$$p = \frac{1}{6} - 2U + \frac{1}{3}\pi$$
$$\pi' = \frac{1}{4}(p - \pi)$$
$$U' = -\frac{1}{2}(\mu - p)$$

10) Encontre as trajetórias temporais (soluções gerais) de π e U, dados:

a) $p_t = \frac{1}{2} - 3U_t + \frac{1}{2}\pi_t$

$$\pi_{t+1} - \pi_t = \frac{1}{4}(p_t - \pi_t)$$
$$U_{t+1} - U_t = -(\mu - p_{t+1})$$

b) $p_t = \frac{1}{4} - 4U_t + \pi_t$

$$\pi_{t+1} - \pi_t = \frac{1}{4}(p_t - \pi_t)$$
$$U_{t+1} - U_t = -(\mu - p_{t+1})$$