Matemática Aplicada à Economia II – Lista 1 – Equações de Diferenças

1) Escreva as seguintes equações de diferenças na forma estendida:
   a) $\Delta y_t = 7$
   b) $\Delta y_t = 0{,}3y_t$
   c) $\Delta y_t = 2y_t - 9$

2) Resolva as seguintes equações de diferenças por iteração:
   a) $y_{t+1} = y_t + 1 \quad (y_0 = 10)$
   b) $y_{t+1} = \alpha y_t \quad (y_0 = \beta)$
   c) $y_{t+1} = \alpha y_t - \beta \quad (y_t = y_o \; onde \; t = 0)$

3) Para cada uma das seguintes equações, encontre y_p, y_c e a solução definida:
   a) $y_{t+1} + 3y_t = 4 \quad (y_0 = 4)$
   b) $2y_{t+1} - y_t = 6 \quad (y_0 = 7)$
   c) $y_{t+1} = 0{,}2y_t + 4 \quad (y_0 = 4)$

4) Qual é a natureza da trajetória temporal obtida de cada equação de diferenças no exercício anterior?

5) Ache as soluções das seguintes equações e determine se as trajetórias temporais são oscilatórias e convergentes:
   a) $y_{t+1} - \frac{1}{3}y_t = 6 \quad (y_0 = 1)$
   b) $y_{t+1} + 2y_t = 9 \quad (y_0 = 4)$
   c) $y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 5 \quad (y_0 = 2)$
   d) $y_{t+1} - y_t = 3 \quad (y_0 = 5)$

6) Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Q_{dt} &= Q_{st} \\ Q_{dt} &= \alpha - \beta P_t \\ Q_{st} &= -\gamma + \delta P_t^* \end{aligned}$$

   Onde P_t^* denota o preço esperado para o período t. Além do mais, suponha que a expectativa de preço dos vendedores é do tipo "adaptativo":
   $P_t^* = P_{t-1}^* + \eta(P_{t-1} - P_{t-1}^*) \qquad (0 < \eta \leq 1)$
   onde η é um coeficiente de ajuste de expectativa:
   a) Dê uma interpretação econômica à equação precedente. Em que aspectos ela é semelhante e diferente da equação de expectativas adaptativas do modelo contínuo?
   b) O que acontece se η assumir seu valor máximo? Podemos considerar o modelo da teia de aranha como um caso especial do presente modelo?
   c) Mostre que o novo modelo pode ser representado pela equação de diferenças de primeira ordem $P_{t-1} - \left(1 - \eta - \frac{\eta\delta}{\beta}\right)P_t = \frac{\eta(\alpha+\gamma)}{\beta}$.
   d) Encontre a trajetória temporal do preço. Essa trajetória é necessariamente oscilatória? Ela pode ser oscilatória? Em que circunstâncias?
   e) Mostre que a trajetória temporal P_t se oscilatória, convergirá somente se $1 - \frac{2}{\eta} < -\frac{\delta}{\beta}$.

7) Dado que:

$$Q_{dt} = 21 - 2P_t$$
$$Q_{st} = -3 + 6P_t$$
$$P_{t+1} = P_t - 0{,}3(Q_{st} - Q_{dt})$$

Encontre a trajetória temporal P_t e determine se ela é convergente.

8) Suponha que, no modelo de mercado com estoque, a oferta em cada período é uma quantidade fixa, digamos, $Q_{st} = k$, em vez de uma função do preço. Analise o comportamento do preço ao longo do tempo. Qual restrição deve ser imposta a k para tornar a solução economicamente significativa?

9) Escreva a equação característica para cada uma das seguintes equações e ache as raízes características:
   a) $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 2$
   b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 7$
   c) $y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 5$
   d) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 4$

10) Para cada uma das equações de diferenças do problema anterior, determine, tendo como base suas raízes características, se a trajetória temporal envolve oscilação ou flutuação degrau, e se ela é explosiva. Encontre as soluções particulares das equações. Elas representam equilíbrios constantes ou móveis?

11) Resolva as seguintes equações de diferenças e analise as trajetórias temporais obtidas:
   a) $y_{t+2} + 3y_{t+1} + \frac{7}{4}y_t = 9 \qquad (y_0 = 6; y_1 = 3)$
   b) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1 \qquad (y_0 = 3; y_1 = 4)$
   c) $y_{t+2} - \ y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 2 \qquad (y_0 = 4; y_1 = 7)$

12) Considerando o Modelo de Samuelson para interação multiplicador-aceleração, encontre os subcasos aos quais pertencem os conjuntos de valores $\alpha\ e\ \gamma$ e descreva a trajetória temporal da interação em termos qualitativos.
   a) $\alpha = 3{,}5;\ \gamma = 0{,}8$
   b) $\alpha = 2{,}0;\ \gamma = 0{,}7$
   c) $\alpha = 0{,}2;\ \gamma = 0{,}9$
   d) $\alpha = 1{,}5;\ \gamma = 0{,}6$

13) Utilizando os valores de $\alpha\ e\ \gamma$ dados nos itens (a) e (c) do exercício anterior, encontre os valores numéricos das raízes características em cada instância, e analise a natureza da trajetória temporal. Seus resultados estão de acordo com os obtidos anteriormente?

14) A partir das equações:

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t \qquad (\alpha, \beta > 0; 0 < g \leq 1)$$
$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t) \qquad (0 < j \leq 1)$$
$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t) \qquad (k > 0)$$

   a) Deduza uma nova equação de diferenças na variável p.
   b) Essa nova equação de diferenças dá um $\bar{p}$ diferente?
   c) Suponha que $j = g = 1$. Encontre as condições sob as quais as raízes características cairão nos casos 1, 2 e 3, respectivamente, do Modelo de Samuelson.

d) Seja $j = g = 1$. Descreva a trajetória temporal de p (incluindo convergência ou divergência) quando $\beta k = 3, 4\ e\ 5$, respectivamente.

15) Encontre as soluções particulares de cada uma das seguintes equações:
   a) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 3^t$
   b) $y_{t+2} - 5y_{t+1} - 6y_t = 2(6)^t$
   c) $3y_{t+2} + 9y_t = 3(4)^t$
   d) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = t$
   e) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 4 + 2t$
   f) $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = 18 + 6t + 8t^2$

16) Encontre as raízes características e a função complementar de:
   a) $y_{t+3} - \frac{1}{2}y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 0$
   b) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + \frac{5}{4}y_{t+1} - \frac{1}{4}y_t = 1$

17) Teste a convergência das soluções das seguintes equações de diferenças pelo teorema de Schur:
   a) $y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 3$
   b) $y_{t+3} - \frac{1}{9}y_t = 9$