**Matemática Aplicada à Economia II – Lista 1 – Equações Diferenciais Ordinárias**

1) Encontre:
   a) $\int 16x^{-3}dx \quad (x \neq 0)$
   b) $\int (x^5 - 3x)dx$
   c) $\int 2e^{-2x}dx$
   d) $\int \frac{4x}{x^2+1}dx$
   e) $\int \left(3e^x + \frac{4}{x}\right)dx$
   f) $\int 4\,xe^{x^2+3}$
   g) $\int x\ln(x)\,dx \quad (x > 0)$
   h) $\int (x+3)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

2) Calcule as seguintes integrais definidas:
   a) $\int_1^3 \frac{1}{2}x^2dx$
   b) $\int_2^4 (x^3 - 6x^2)dx$
   c) $\int_4^2 x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)dx$
   d) $\int_{-1}^{e-2} \frac{dx}{x+2}$
   e) $\int_2^3 (e^{2x} + e^x)dx$
   f) $\int_e^6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$

3) Diz-se que a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa uma área sob uma curva. Essa curva se refere ao gráfico do integrando $f(x)$, ou da função primitiva $F(x)$? Se desenharmos o gráfico da função $F(x)$, como podemos mostrar sobre ele a integral definida dada – por uma área, por um seguimento de reta, ou por um ponto?

4) Verifique se a constante c pode ser expressa de modo equivalente como uma integral definida:
   a) $c \equiv \int_0^b \frac{c}{d}dx$
   b) $c \equiv \int_0^c 1\,dt$

5) Quais das seguintes integrais são impróprias e por quê? Calcule todas as integrais que forem impróprias.
   a) $\int_0^\infty e^{-rt}\,dt$
   b) $\int_2^3 x^4dx$
   c) $\int_0^1 x^{-2/3}dx$
   d) $\int_{-\infty}^0 e^{rt}dt$
   e) $\int_1^5 \frac{dx}{x-2}$
   f) $\int_{-3}^4 6dx$

6) Construa o gráfico da função $y = ce^{-t}$ para t não negativo, $(c > 0)$, e sombreie a área sob a curva. Escreva uma expressão matemática para essa área e determine se é uma área finita.

7) Dadas as seguintes funções receita marginal:
   a) $R'(Q) = 28Q - e^{0,3Q}$ b) $R'(Q) = 10(1+Q)^{-2}$
   Encontre, em cada caso, a função receita total $R(Q)$. Que condição inicial você pode introduzir para definir a constante de integração?

8) Suponha que a taxa de investimento é descrita pela função $I(t) = 12t^{1/3}$ e que $K(0) = 25$:
   a) Encontre a trajetória temporal do estoque de capital K.
   b) Encontre o montante de acumulação de capital durante os intervalos de tempo $[0,1]$ e $[1,3]$, respectivamente.

9) Dado um fluxo contínuo de renda à taxa constante de $\$1000$ por ano:
   a) Qual será o valor presente $\pi$ se o fluxo de renda durar 2 anos e a taxa contínua de desconto for 0,05 por ano?
   b) Qual será o valor presente $\pi$ se o fluxo de renda terminar exatamente após 3 anos e a taxa de desconto for 0,04?

10) Quantos fatores de produção são explicitamente considerados no modelo de Domar? O que esse fato implica no que se refere à razão capital-trabalho na produção?

11) Encontre $y_c, y_p$, a solução geral e a solução definida:
   a) $\frac{dy}{dt} + 4y = 12; y(0) = 2$
   b) $\frac{dy}{dt} - 2y = 0; y(0) = 9$
   c) $\frac{dy}{dt} + 10 = 15; y(0) = 0$
   d) $2\frac{dy}{dt} + 4y = 6; y(0) = \frac{1}{2}$

12) Encontre a solução de cada uma das seguintes equações utilizando uma fórmula adequada e verifique a validade de suas respostas:
   a) $\frac{dy}{dt} + y = 4; y(0) = 0$
   b) $\frac{dy}{dt} = 23; y(0) = 1$
   c) $\frac{dy}{dt} - 5y = 0; y(0) = 6$
   d) $3\frac{dy}{dt} + 6y = 5; y(0) = 0$

13) Sejam a demanda e a oferta $Q_d = \alpha - \beta P + \sigma\frac{dP}{dt}, Q_s = -\gamma + \delta P, (\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$
   a) Supondo que a taxa de variação do preço ao longo do tempo é diretamente proporcional ao excesso de demanda, encontre a trajetória temporal $P(t)$ (solução geral).
   b) Qual é o preço de equilíbrio intertemporal? Qual é o preço de equilíbrio de compensação de mercado?
   c) Qual restrição sobre o parâmetro σ asseguraria a estabilidade dinâmica?

14) Sejam a demanda e a oferta $Q_d = \alpha - \beta P + \eta\frac{dP}{dt}, Q_s = \delta P, (\alpha, \beta, \eta, \delta > 0)$
   a) Supondo que o mercado seja compensado em todos os instantes de tempo, encontre a trajetória temporal $P(t)$ (solução geral).
   b) Esse mercado tem um preço de equilíbrio intertemporal dinamicamente estável?

15) Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem; se for dada uma condição inicial, defina a constante arbitrária:
   a) $\frac{dy}{dt} + 5y = 15$
   b) $\frac{dy}{dt} + 2ty = 0$
   c) $\frac{dy}{dt} + 2ty = t; y(0) = \frac{3}{2}$
   d) $\frac{dy}{dt} + t^2y = 5t^2; y(0) = 6$
   e) $2\frac{dy}{dt} + 12y + 2e^t = 0; y(0) = \frac{6}{7}$
   f) $\frac{dy}{dt} + y = t$

16) Verifique se cada uma das seguintes equações diferenciais é exata e resolva pelo procedimento em quatro etapas:
   a) $2yt^3dy + 3y^2t^2dt = 0$
   b) $3Y^2tdy + (y^3 + 2t)dt = 0$
   c) $t(1 + 2y)dy + y(1 + y)dt = 0$
   d) $\frac{dy}{dt} + \frac{2y^4t+3t^2}{4y^3t^2} = 0$

17) As seguintes equações diferenciais são exatas? Se não forem, experimente t, y e y² como possíveis fatores integrantes.
   a) $2(t^3 + 1)dy + 3yt^2dt = 0$
   b) $4y^3tdy + (2y^4 + 3t)dt = 0$

18) Determine, para cada uma das equações seguintes: (1) se as variáveis são separáveis; (2) se a equação é linear ou se pode ser linearizada; (3) resolva (a) e (b) por variáveis separáveis e (c) e (d) por Bernoulli.
   a) $2tdy + 2ydt = 0$
   b) $\frac{y}{y+t}dy + \frac{2t}{y+t}dt = 0$
   c) $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$
   d) $\frac{dy}{dt} = 3y^2t$

19) Construa o gráfico da linha de fase para cada uma das seguintes equações e interprete-a:
   a) $\frac{dy}{dt} = y - 7$
   b) $\frac{dy}{dt} = 1 - 5y$
   c) $\frac{dy}{dt} = (y + 1)^2 - 16 \qquad (y \geq 0)$
   d) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y - y^2 \qquad (y \geq 0)$

20) Dada $\frac{dy}{dt} = (y - 3)(y - 5) = y^2 - 8y + 15$:
   a) Deduza que há dois níveis de equilíbrio possíveis de y, um em $y = 3$, e outro em $y = 5$.
   b) Encontre os sinais de $\frac{d}{dy}(\frac{dy}{dt})$ em $y = 3$ e $y = 5$, respectivamente. O que você pode inferir deles?

21) Mostre que, se o capital estiver crescendo à taxa λ (isto é, $K = Ae^{\lambda t}$), o investimento líquido *I* também deve estar crescendo àquela taxa λ.

22) Desenhe o diagrama de fase para cada uma das seguintes e discuta os aspectos qualitativos da trajetória temporal $y(t)$:

a) $y = 3 - y - \ln(y)$

b) $y = e^{y} - (y + 2)$

23) Encontre a solução particular e complementar de cada equação:

a) $y''(t) - 2y'(t) + 5y = 2$

b) $y''(t) + 2y'(t) - y = -4$

c) $y''(t) = 12$

d) $y''(t) + 6y'(t) + 5y = 10$

e) $y''(t) - 2y'(t) + y = 3$

24) Mostre que, quando $t \to \infty$, o limite de $te^{rt}$ é zero se $r < 0$, mas é infinito se $r \geq 0$.

25) Encontre $y_p\ e\ a\ y_c$, a solução geral e a solução definida de cada uma das seguintes equações:

a) $y''(t) - 4y'(t) + 8y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 7$

b) $y''(t) + 4y'(t) + 8y = 2; y(0) = 2\frac{1}{4}, y'(0) = 4$

c) $y''(t) + 3y'(t) + 4y = 5; y(0) = 2, y'(0) = 2$

d) $y''(t) - 2y'(t) + 10y = 0; y(0) = 6, y'(0) = 8\frac{1}{2}$

e) $y''(t) + 9y = 3; y(0) = 1, y'(0) = 3$

26) Quais das equações do exercício anterior dão trajetórias temporais com (a) flutuação amortecida; (b) flutuação uniforme; (c) flutuação explosiva?

27) Sejam os parâmetros $m, n, u\ e\ w$ todos diferentes de zero em:

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP'' \qquad (\alpha, \beta > 0)$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + wP'' \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

a) Supondo uma compensação de mercado em cada instante de tempo, escreva a nova equação diferencial do modelo.

b) Encontre o preço de equilíbrio intertemporal.

c) Sob quais circunstâncias a flutuação periódica pode ser excluída?

28) Sejam a demanda e a oferta:

$$Q_d = 9 - P + P' + 3P''$$
$$Q_s = -1 + 4P - P' + 5P'' \qquad P(0) = 4\ e\ P'(0) = 4$$

a) Encontre a trajetória de preço supondo uma compensação de mercado em cada instante.

b) A trajetória temporal é convergente? Com flutuação?

29) Encontre a solução particular de cada uma das seguintes equações pelo método dos coeficientes indeterminados:

a) $y''(t) + 2y'(t) + y = t$

b) $y''(t) + 4y'(t) + y = 2t^2$

c) $y''(t) + y'(t) + 2y = e^t$

d) $y''(t) + y'(t) + 3y = sen(t)$

30) Encontre $y_p\ e\ y_c$ (e, por conseguinte, a solução geral) de:

a) $y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y = 4$

b) $y'''(t) + 7y''(t) + 15y'(t) + 9y = 0$

c) $y'''(t) + 6y''(t) + 10y'(t) + 8y = 8$

31) Sem encontrar as raízes características das seguintes equações diferenciais, determine se elas darão origem a trajetórias temporais convergentes:

a) $y'''(t) - 10y''(t) + 27y'(t) - 18y = 3$

b) $y'''(t) + 11y''(t) + 34y'(t) + 24y = 5$

c) $y'''(t) + 4y''(t) - 5y'(t) - 2y = -2$

32) Deduza, pelo teorema de Routh, que, para a equação diferencial linear de segunda ordem $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y = b$, a trajetória de solução será convergente independentemente das condições iniciais se, e somente se, ambos os coeficientes $a_1$ $e$ $a_2$ forem positivos.