Lista de Exercício III

1. Como vimos para que a equação de Dirac seja covariante sob transformações de Lorentz é preciso que ela transforme como

$$\psi'\left(x'\right) = S\,\psi\left(x\right)$$

onde a matriz S satisfaz

$$S^{-1}\,\gamma_\mu\,S = \Lambda_\mu^\nu\,\gamma_\nu$$

Determine a matriz S para

(a) uma rotação espacial no plano $x\,y$

(b) um boost de Lorentz no plano $x\,t$

O que ocorre quando o ângulo de rotação é $2\,\pi$?
As matrizes S que voce obteve são unitárias?
Mostre que em qualquer um dos dois casos temos

$$S^{-1} = \alpha_m\,S^\dagger\,\alpha_m$$

2. Considere um elétron em um campo magnético uniforme $\vec{B}$ ao longo do eixo-z. Obtenha as autofunções de energia positiva mais geral. Mostre que os autovalores da energia são

$$E = \sqrt{m^2\,c^4 + c^2\,p_z^2 + 2\,n\,e\,\hbar\,c\ \mid \vec{B} \mid} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Liste todas as constante de movimento.

3. Prove que

$$S_{\vec{p}}\,c_r^\dagger\left(\vec{p}\right) \mid 0\rangle = \left(-1\right)^{r+1}\,\frac{\hbar}{2}\,c_r^\dagger\left(\vec{p}\right) \mid 0\rangle$$

$$S_{\vec{p}}\,d_r^\dagger\left(\vec{p}\right) \mid 0\rangle = \left(-1\right)^{r+1}\,\frac{\hbar}{2}\,d_r^\dagger\left(\vec{p}\right) \mid 0\rangle$$

onde

$$S_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2}\int d^3x\ :\psi^\dagger\,\sigma_{\vec{p}}\,\psi: \qquad\qquad \sigma_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{\mid\vec{p}\mid}$$

4. Prove que

$$\left\{\psi_\alpha\left(x\right)\,,\,\psi_\beta\left(y\right)\right\} = \left\{\bar{\psi}_\alpha\left(x\right)\,,\,\bar{\psi}_\beta\left(y\right)\right\} = 0$$

$$\left\{\psi_\alpha^\pm\left(x\right)\,,\,\bar{\psi}_\beta^\mp\left(y\right)\right\} = i\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m\,c}{\hbar}\right)_{\alpha\,\beta}\Delta^\pm\left(x-y\right)$$

onde

$$\Delta^\pm\left(x\right) = \mp\frac{i\,c}{2\left(2\,\pi\right)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_k}\,e^{\mp i\,k\cdot x}$$

e ψ e $\bar{\psi}$ são dados por (4.51) de Mandl e Shaw.

5. Todos os exercícios do capítulo 4 do livro do Mandl e Shaw.