Aula 3 - Integral Imprópria

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Função limitada

Definição 1

Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é *limitada* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < M$, para todo $x \in D$.

Teorema 1

Toda função contínua definida em um intervalo fechado é limitada.

Teorema 2

Toda função integrável é limitada.

Motivação para definir integral imprópria

- Em alguns casos queremos calcular a área abaixo de um gráfico de uma função que tem domínio ilimitado (da forma $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$ ou $\mathbb{R}$).
- Quando a função tende a 0, no ∞ e/ou no $-\infty$, a área pode ser finita.
- Em outros casos a função está definida num intervalo limitado, mas é uma função ilimitada, e, portanto, não é integrável.
- Mesmo assim, podemos tentar calcular a área abaixo do seu gráfico, que pode ser finita.
- Em todos esses casos, a ideia é aproximarmos a área abaixo do gráfico por regiões que sabemos integrar.
- Uma quantidade finita de pontos de descontinuidade não impede que a função seja integrável, desde que ela seja limitada.
- Mas se em algum ponto de descontinuidade a função tende a ∞, ou a $-\infty$, ou oscila entre ambos, então precisamos usar integral imprópria.

Integral Imprópria

Seja $f : dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos as seguintes *integrais impróprias*, quando os referidos limites existirem em $\mathbb{R}$:

(I) Se $dom(f) = [a, \infty[$ e $\int_a^b f(x)dx$ existe, para todo $b > a$, definimos

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(II) Se $dom(f) =]-\infty, b]$ e $\int_a^b f(x)dx$ existe, para todo $a < b$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(III) Se $dom(f) = \mathbb{R}$ e $\int_a^b f(x)dx$ existe, para todos $a < b$ em $\mathbb{R}$, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

(IV) Se $dom(f) = [a, b[$ e é f é integrável em todo $[a, c] \subseteq [a, b[$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

(V) Se $dom(f) =]a, b]$ e é f é integrável em todo $[c, b] \subseteq]a, b]$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

(VI) Se $dom(f) =]a, b[$ e é f é integrável em todo $[c, d] \subseteq]a, b[$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx,$$

sendo o integral da direita definida por (IV).

(VII) Se $dom(f) = I \setminus \{c\}$, onde I é um dos intervalos $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ e $c \in]a, b[$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

onde tais integrais são como em (IV), (V) ou (VI), quando tais integrais existem.

(VIII) Se $dom(f) =]a, \infty[$ e f é integrável em todo $[b, c] \subseteq]a, \infty[$, definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to a^+} \int_b^\infty f(x)dx,$$

sendo a integral da direita definida como em (I).

(IX) Se $dom(f) =]-\infty, a[$ e f é integrável em todo $[b,c] \subseteq]-\infty, a[$, definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b \to a^-} \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$$

sendo a integral da direita definida como em (II).

(X) Se $dom(f) = I \setminus \{c\}$, onde I é um dos intervalos $[a,\infty[$ ou $]a,\infty[$ e $c > a$, definimos

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

onde tais integrais são como em (I), (IV), (VI) e/ou (VIII), quando tais integrais existem.

(XI) Se $dom(f) = I \setminus \{c\}$, onde I é um dos intervalos $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$ e $c < a$, definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{a} f(x)dx,$$

onde tais integrais são como em (II), (V), (VI) e/ou (IX), quando tais integrais existem.

(XII) Se $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{c\}$, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

onde tais integrais são como em (X) e (XI), quando tais integrais existem.

Definições e observações

- Uma integral imprópria é dita *convergente* quando está bem definida em $\mathbb{R}$, e dita *divergente* quando não (isto é, quando o limite é ∞, $-\infty$ ou não existe).
- As integrais impróprias descritas em (I) a (III) são chamadas de *integrais impróprias de tipo 1* (intervalo ilimitado).
- As integrais impróprias descritas em (IV) a (VII) são chamadas de *integrais impróprias de tipo 2* (função ilimitada).
- As integrais impróprias descritas em (VIII) a (XII) são de tipo 1 e 2.

- Podemos usar a mesma notação de integral imprópria de tipo 2 quando a função está definida em todo intervalo fechado, mas tem pontos de descontinuidade em que a função tende a infinito, menos infinito, ou oscila entre ambos. Exemplo: $\int_0^\infty f(x)dx$, onde $f(0) = 0$ e $f(x) = \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$.
- A notação para integral imprópria e integral de Riemann é a mesma, embora possuam significados diferentes.
- A notação $\int_a^b f(x)dx$ significará integral imprópria sempre que f for ilimitada no intervalo $[a, b]$.
- Quando f for limitada, a definição de integral imprópria do tipo 2 coincide com a de integral de Riemann (estendendo o domínio).

Exemplo 1

Calcule, se existir:

- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\,dx.$

Exemplo 2

Para quais valores de r a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}$$

converge?

Exemplo 3

Para quais valores de r a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}$$

converge?

Exemplo 4

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Exemplo 5

Calcule, se existir:

- $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}} dx$
- $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x - 2} dx$

Teorema 3 (da Comparação)

Sejam f e g funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Temos:

(a) *Se* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é convergente, então* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ *é convergente.*

(b) *Se* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é divergente.*

Observação 1

O teorema acima vale também para outros tipos de integral imprópria.

Exemplo 6

Prove que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

é convergente.

Fim