Plano tangente e Reta normal

Se f diferenciável em (x_0, y_0) temos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde

$$E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

Se $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

onde

$$E(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Fazendo

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

temos

$$f(x,y) = T(x,y) + E(x,y)$$

onde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

Deste modo $T(x,y)$ é a única função afim que aproxima $f(x,y)$ com erro $E(x,y)$ tendendo a zero mais rapidamente que $\|(x-x_0, y-y_0)\|$

Definição

Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

$$(\star) z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Observação: Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano $(\star)$ existirá, mas não será o plano tangente.

Segue de $(\star)$ que o vetor $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$ é o vetor normal ao plano tangente. A reta que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e paralelo a este vetor é chamada a reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e tem equação igual a

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = xy^2 - 2x + 1$. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto* $(0, 1, f(0,1))$

solução: A equação do plano tangente é:

$$z - f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1).$$

Temos que $f(0,1) = 1$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

Portanto a equação do plano tangente é

$$z - 1 = -(x-0) + 0(y-1) = -x$$

A reta normal é

$$(x, y, z) = (0, 1, f(0, 1)) + \lambda(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1), -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(-1, 0, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$