Diferenciabilidade

Sabemos do Calculo I, que para uma função de uma variável real a valores reais diferenciabilidade implica em continuidade. O conceito de derivadas parciais introduzido na aula anterior para funções de várias variáveis a valores reais não apresenta esta propriedade, vimos exemplo, de função que tem derivadas parciais no ponto sem ser contínua no ponto.

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto e* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Dizemos que* f *é diferenciável em* (x_0, y_0) *se:*

a) f *admite derivadas parciais em* (x_0, y_0) *e*

b)

$$(\star) \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde

$$E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$

Teorema

Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f será contínua em (x_0, y_0).

Demonstração: Temos que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + E(h, k)$$

Como f é diferenciável em (x_0, y_0) então

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h, k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|}\|(h, k)\| = 0$$

e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = 0$$

resulta que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0).$$

Observações:

a) Se uma das derivadas parciais não existir em (x_0, y_0), então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

b) Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), mas se o limite $(\star)$ não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

c) Se f não for contínua em (x_0, y_0) então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

Definição

Dizemos que f é diferenciável em $B \subset D_f$, quando f for diferenciável em todos os pontos $(x, y) \in B$. Diremos simplesmente que f é diferenciável se f for diferenciável em todo o ponto do seu domínio.

Exemplo

Mostre que $f(x, y) = xy$ é uma função diferenciável

solução: Seja $(x_0, y_0) \in D_f = \mathbb{R}^2$. Notamos que f tem derivadas parciais em (x_0, y_0) e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &= (x_0 + h)(y_0 + k) - x_0 y_0 - y_0 h - x_0 k \\ &= hk \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Exemplo

Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$.

solução:

Basta notar $f(t^2,t) = 1$ e $f(t,0) = 0$ e daí

$$\lim_{t \to 0} f(t^2,t) = 1 \neq 0 = \lim_{t \to 0} f(t,0)$$

ou seja, f não é contínua em $(0,0)$, portanto não é diferenciável em $(0,0)$.

Exemplo

Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$

solução: Vimos na aula anterior que f é contínua em $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \\ &= \frac{h^3}{h^2+k^2} - h \\ &= \frac{-hk^2}{h^2+k^2} \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Como $\frac{E(h,h)}{\|(h,h)\|} = -\frac{h}{2\sqrt{2}|h|}$ então $\lim_{h\to 0} \frac{E(h,h)}{\|(h,h)\|}$ não existe, o que resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

não existe. Portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

Condição suficiente para diferenciabilidade

Teorema

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto e* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Se as derivadas parciais* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existirem em* Ω *e forem contínuas em* (x_0, y_0) *então* f *será diferenciável em* (x_0, y_0).

Corolário

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto. Se* f *for de classe* C^1 *em* Ω *então* f *será diferenciável em* Ω.

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$
b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$
c) Mostre que f é uma função diferenciável

solução:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\longrightarrow 0} x \sin\frac{1}{x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\longrightarrow 0} y \sin\frac{1}{y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) Não existem $\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t,t)$, $\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(t,t)$. Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.

c)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2} = 0$$

portanto f é diferenciável em $(0,0)$.