MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 6 (21/09/2020)

Supremo, ínfimo, máximo e mínimo

Na última aula vimos as definições abaixo:

Seja K um corpo ordenado e seja $A \subset K$ um conjunto não vazio.

- Se A for limitado superiormente e se existir $\underline{s \in K}$ que é o menor dos majorantes de A, dizemos que s é *supremo de* A e escrevemos $s = \sup A$.
- Se A for limitado inferiormente e se existir $\underline{i \in K}$ que é o maior dos minorantes de A, dizemos que i é *ínfimo de* A e escrevemos $i = \inf A$.
- Um número $\underline{m \in A}$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$ é chamado *máximo de* A e indicado por $m = \max A$.
- Um número $\underline{n \in A}$ tal que $n \leq a$ para todo $a \in A$ é chamado *mínimo de* A e indicado por $n = \min A$.

Um exemplo importante

No corpo $\mathbb{Q}$, considere os conjuntos

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0, r^2 < 2\} \quad \text{e} \quad B = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0, r^2 > 2\}$$

Temos:

1. $A \cup B = \mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$ (pois não existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r^2 = 2$)
2. $A \cap B = \phi$
3. Todo elemento de B é um majorante de A.

   De fato, se $b \in B$, tem-se $b^2 > 2 > a^2$, para todo $a \in A$. Portanto,

   $$b^2 - a^2 > 0 \iff (b+a)(b-a) > 0 \iff b - a > 0 \iff b > a$$

   para todo $a \in A$. Logo b é um majorante de A.

Um exemplo importante (continuação)

4. A não tem máximo e B não tem mínimo.

Seja $p \in \mathbb{Q}^+$ qualquer. Defina

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} \tag{1}$$

Fazendo contas temos:

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} \tag{2}$$

se $p \in A$ então $p^2 - 2 < 0$. Por (2), $q^2 - 2 < 0$, logo $q \in A$.

Além disso, (1) $\Rightarrow q > p$.

Conclusão: nenhum $p \in A$ pode ser máximo de A.

se $p \in B$ então $p^2 - 2 > 0$. Por (2), $q^2 - 2 > 0$, logo $q \in B$.

Além disso, (1) $\Rightarrow q < p$.

Conclusão: nenhum $p \in B$ pode ser mínimo de B.

Um exemplo importante (continuação)

Lembrando que

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0, r^2 < 2\} \quad \text{e} \quad B = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0, r^2 > 2\}$$

vamos provar que o conjunto A não tem supremo (apesar de ser não vazio e limitado superiormente).

Suponha, por absurdo, que exista $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s = \sup A$.

- Suponha que $s \in A$. Como s é majorante de A, s seria o máximo de A. Isso é um absurdo, pois A não tem máximo.
- Logo, $s \notin A$. Isso implica que $s \in B$. Vimos, no ítem (3) acima, que todo elemento de b é majorante de A. Como s é o menor dos majorantes de A, podemos concluir que $s \leq b, \forall b \in B$. Isso significa que s é o mínimo de B, o que também é absurdo!

Com isso concluímos que A não tem supremo!

O Axioma do supremo

Um corpo ordenado K satisfaz o *axioma do supremo* se para cada subconjunto $C \subset K$ não vazio e limitado superiormente existe $\sup C$ em K.

O exemplo que acabamos de ver nos mostrou que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ <u>não</u> satisfaz o axioma do supremo.

O conjunto dos números reais

Teorema

Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$ que satisfaz o axioma do supremo. Além disso, $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$ como subcorpo.

São conhecidas duas demonstrações para este teorema.

Cada uma delas consiste em construir, a partir de $\mathbb{Q}$, um conjunto $\mathbb{R}$ que satisfaz todos os axiomas de corpo ordenado e o axioma do supremo.

O conjunto construído contém $\mathbb{Q}$ não apenas como subconjunto, mas como subcorpo, isto é, as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{R}$, quando aplicadas a elementos de $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações usuais de $\mathbb{Q}$.

É possível provar também que o conjunto dos racionais positivos está contido no conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$.

Cortes de Dedekind

A primeira apresentação rigorosa do conceito de número real foi feita pelo matemático alemão *Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916)*.

Há uma outra maneira de construir o conjunto $\mathbb{R}$: por meio das *sequências de Cauchy*.

Um *corte* é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes três propriedades:

(C1) $\alpha \neq \phi$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(C2) quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Q}$, se $p \in \alpha$ e $q < p$ então $q \in \alpha$;

(C3) α não tem máximo.

Exemplo 1: $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : r < 2\}$ é um corte.

Exemplo 2: $\beta = \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\}$ é um corte.

Cortes de Dedekind

$\mathbb{R}$ é definido como o conjunto de todos os cortes.

- A ideia que está por trás dessa definição é a de caracterizar um número real pelo conjunto de todos os racionais que o precedem.
  - O corte $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : r < 2\}$ caracteriza o número real 2.
  - O corte $\beta = \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\}$ caracteriza o número real $\sqrt{2}$.
- A partir de $\mathbb{Q}$ chegamos a novos números!
- Sobre o conjunto de cortes é preciso definir toda a estrutura: adição, multiplicação, ordem.
- Também é necessário provar que os cortes satisfazem todos os axiomas de corpo ordenado e o axioma do supremo, além de provar que $\mathbb{Q}$ é subcorpo de $\mathbb{R}$.

Tudo isso pode ser encontrado em vários livros. Por exemplo, no Apêndice A de **Guidorizzi, H.**, Um curso de Cálculo, Volume 1.

Exercício

Prove a seguinte afirmação:

Se $A \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente, então A tem ínfimo.

Na próxima aula veremos algumas consequências do axioma do supremo bem como algumas propriedades importantes de $\mathbb{R}$.