MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Lista de Exercícios 2: Números Reais, Supremo e Ínfimo

1. Prove que em um corpo ordenado K valem as seguintes propriedades:
   (a) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
   (b) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
   (c) Se $0 < a < b$ então $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$. (A média geométrica é menor do que a média aritmética.)

2. Resolva $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$, identificando os axiomas e propriedades utilizados em cada passagem.

3. Prove que cada número a seguir é irracional:
   a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

4. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, exiba um contra-exemplo.
   (a) A soma de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.
   (b) O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.
   (c) A soma de dois números irracionais é irracional.
   (d) O produto de dois números irracionais é irracional.

5. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente. Prove que $\sup A$ é único.

6. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Prove que $\inf B$ é único.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado e suponha que m é o máximo de A, isto é, $m \in A$ e $a \leq m, \forall a \in A$. Prove que A tem supremo e que $\sup A = m$. Enuncie e demonstre o resultado análogo para ínfimo.

8. Dizemos que um subconjunto D de um corpo ordenado é *limitado* se for limitado superiormente e inferiormente, isto é, se existirem d_1 e d_2 tais que $d_1 \leq x \leq d_2$ para todo $x \in D$. Prove que D é limitado se e somente se existe d tal que $|x| \leq d$ para todo $x \in D$.

9. Verifique se cada subconjunto de $\mathbb{R}$ dado é limitado superiormente ou inferiormente e encontre, quando existir, o supremo, o ínfimo. Quais conjuntos têm máximo ou mínimo? Justifique todas as respostas.

a) $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *b)* $\left\{ \dfrac{n + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *c)* $\left\{ \dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *e)* $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *f)* $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

g) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1, \dfrac{x}{x^2 - 1} \leq 2 \right\}$ *h)* $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \dfrac{1}{x} \leq x \right\}$

i) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1, \dfrac{1}{x-1} \leq 4x + 1 \right\}$ *j)* $\{x^2 + x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$ *l)* $\left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3^k} : n \in \mathbb{N} \right\}$

10. Considere o subconjunto $D = \left\{ \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ de $\mathbb{R}$. Prove que -1 e 1 são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de D e que eles não pertencem a D.

11. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Prove que se $A \subseteq B$, então

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

12. Sejam $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

    (a) Prove que qualquer elemento de A é menor do que qualquer elemento de B.

    (b) Calcule $\sup A$ e $\inf B$.

    (c) Encontre $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < 10^{-3}$.

13. Sejam A e B dois subcojuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove:

    (a) $\sup A \leq \inf B$.

    (b) $\sup A = \inf B$ se e somente se para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \varepsilon$.

14. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Defina o conjunto

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

    Mostre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$, caso existam.

15. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado. Para $k \in \mathbb{R}$ fixado, defina $kA = \{kx : x \in A\}$.

    (a) Prove que se $k > 0$ então $\sup(kA) = k \cdot \sup A$ e $\inf(kA) = k \cdot \inf A$.

    (b) Prove que se $k < 0$ então $\sup(kA) = k \cdot \inf A$ e $\inf(kA) = k \cdot \sup A$.

    Note que, como consequência de (b), valem as igualdades

$$\sup(-A) = -\inf A \qquad \text{e} \qquad \inf(-A) = -\sup A$$

16. Uma propriedade importante de $\mathbb{R}$ é que entre quaisquer dois números reais distintos existem um número irracional e um número racional. Vamos prová-la. Para isso, começamos com a frase "Sejam a e b números reais distintos."

    (a) Mostre que podemos supor que a e b são positivos e que $a < b$.

    (b) Para mostrar que existe um racional entre a e b, mostre primeiro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < b - a$. Em seguida, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < \frac{n}{m} < b$.

    (c) Para mostrar que existe um irracional entre a e b use a ideia de (a) e mostre que existem m e n tais que $\frac{n\sqrt{2}}{m}$ está entre a e b.