

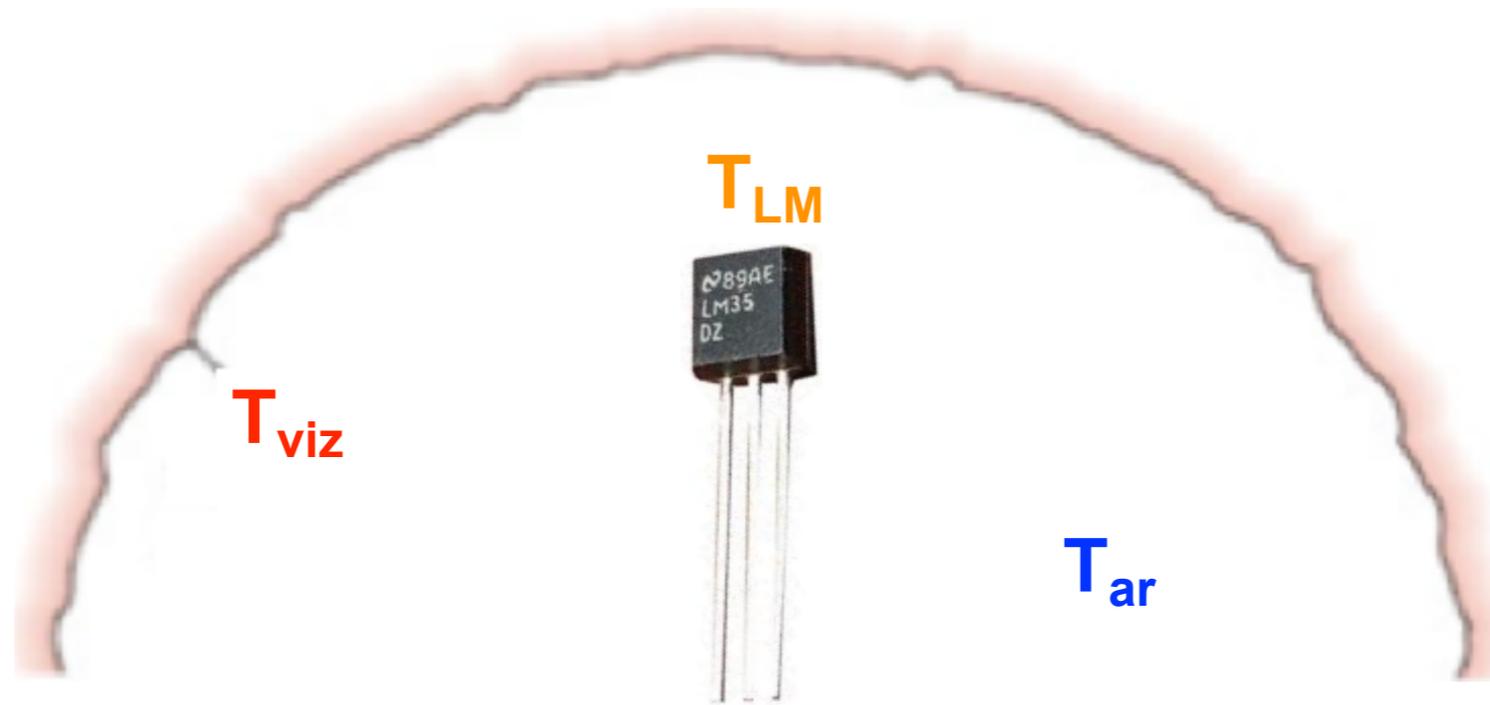
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo



# Transferência de Calor

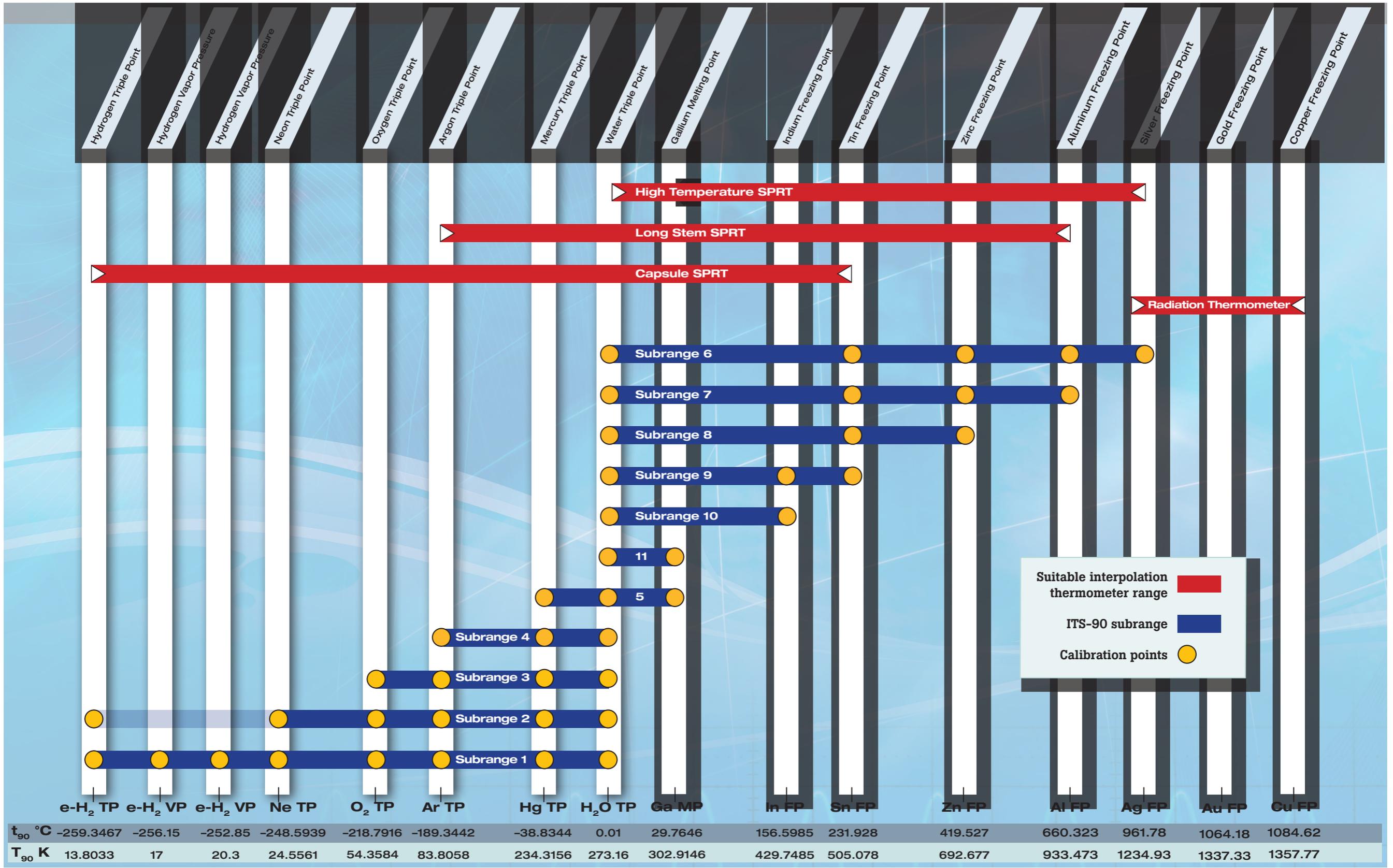
## Introdução à Condução de Calor

- Na aula anterior buscamos medir a temperatura do ar:



Como nos certificamos que o transdutor funciona adequadamente?

Devemos comparar com uma temperatura “conhecida” e eventualmente calibrar o transdutor se necessário.

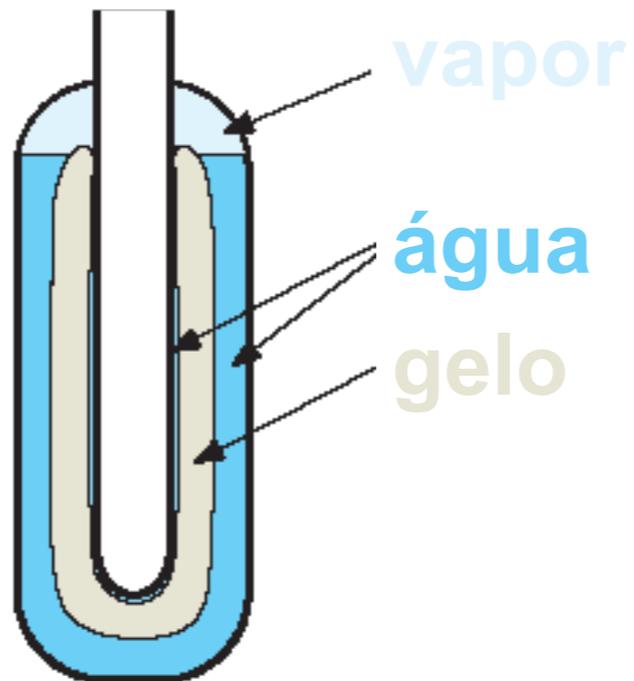


# Célula de ponto triplo (H<sub>2</sub>O)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

$T_{PT} = 0,01 \text{ } ^\circ\text{C}$   
 $\pm 0.0001 \text{ } ^\circ\text{C!}$



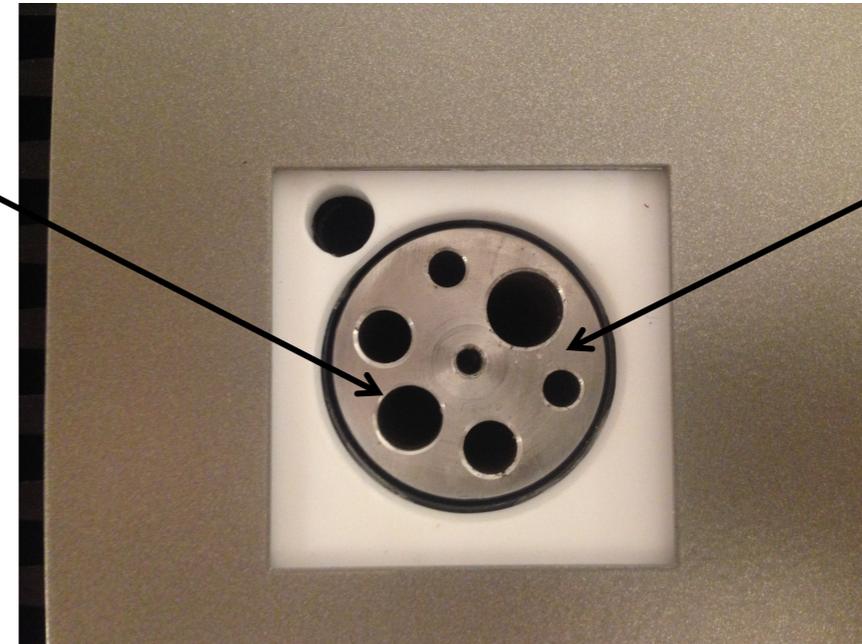
**Imperdível:** <https://www.youtube.com/watch?v=EkFmrWsSzgA>

**Fonte:** <http://www.npl.co.uk/temperature-humidity/products-services/supply-of-temperature-fixed-point-for-the-calibration-of-standard-platinum-resistance-thermometers-and-thermocouples>

- Podemos usar um calibrador de bloco seco  $\pm 0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$



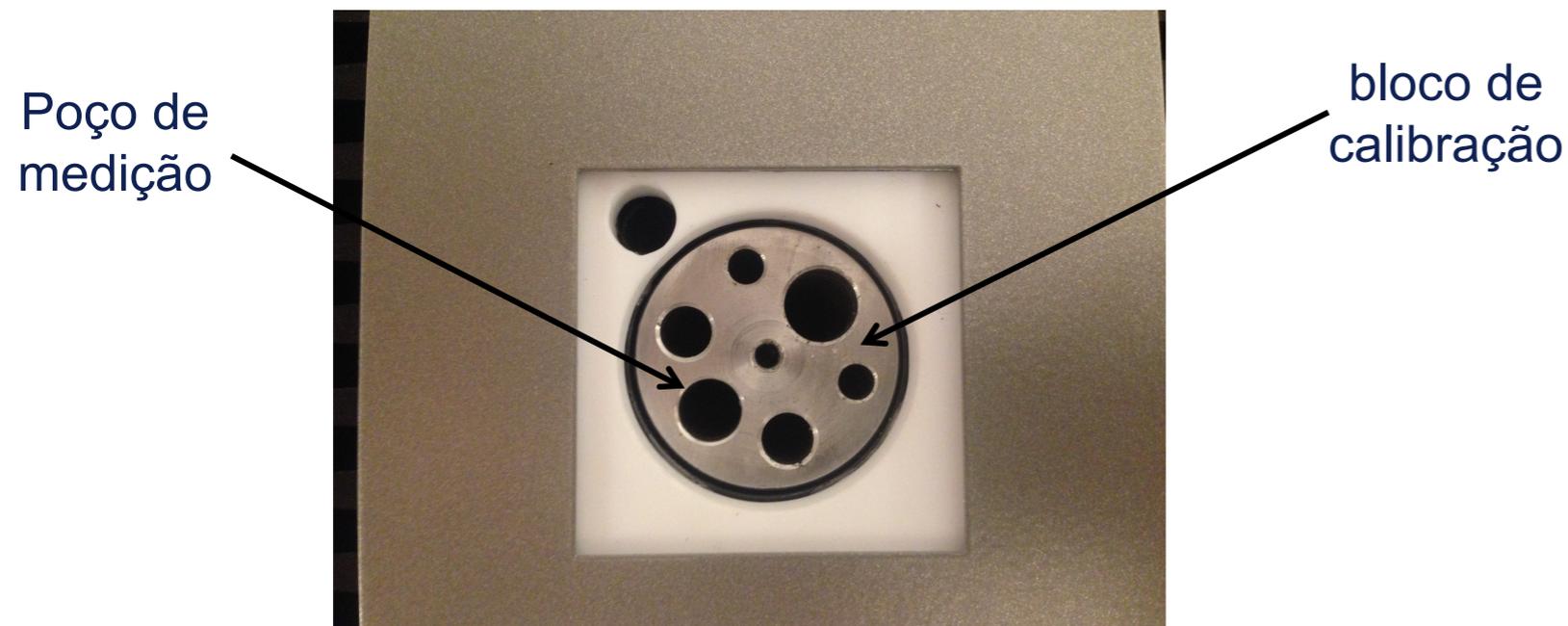
Poço de  
medição



bloco de  
calibração

Medimos a temperatura em um dos poços com o nosso transdutor e a de outro poço com um instrumento padrão e comparamos as medidas.

Existe diferença de temperatura entre os poços? Como podemos avaliar? Como podemos projetar um bloco em que as variações sejam pequenas?



Existe diferença de temperatura entre os poços?

Como podemos avaliar a diferença?

Como podemos projetar um bloco em que as variações de temperaturas sejam pequenas?

Podemos projetar se formos capazes de determinar o campo de temperaturas no interior do bloco de alumínio.



## O que é a Lei de Fourier?

Equação que permite o cálculo do fluxo de calor por condução a partir do conhecimento da distribuição de temperatura no meio.

## Qual é sua forma geral?

$$\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

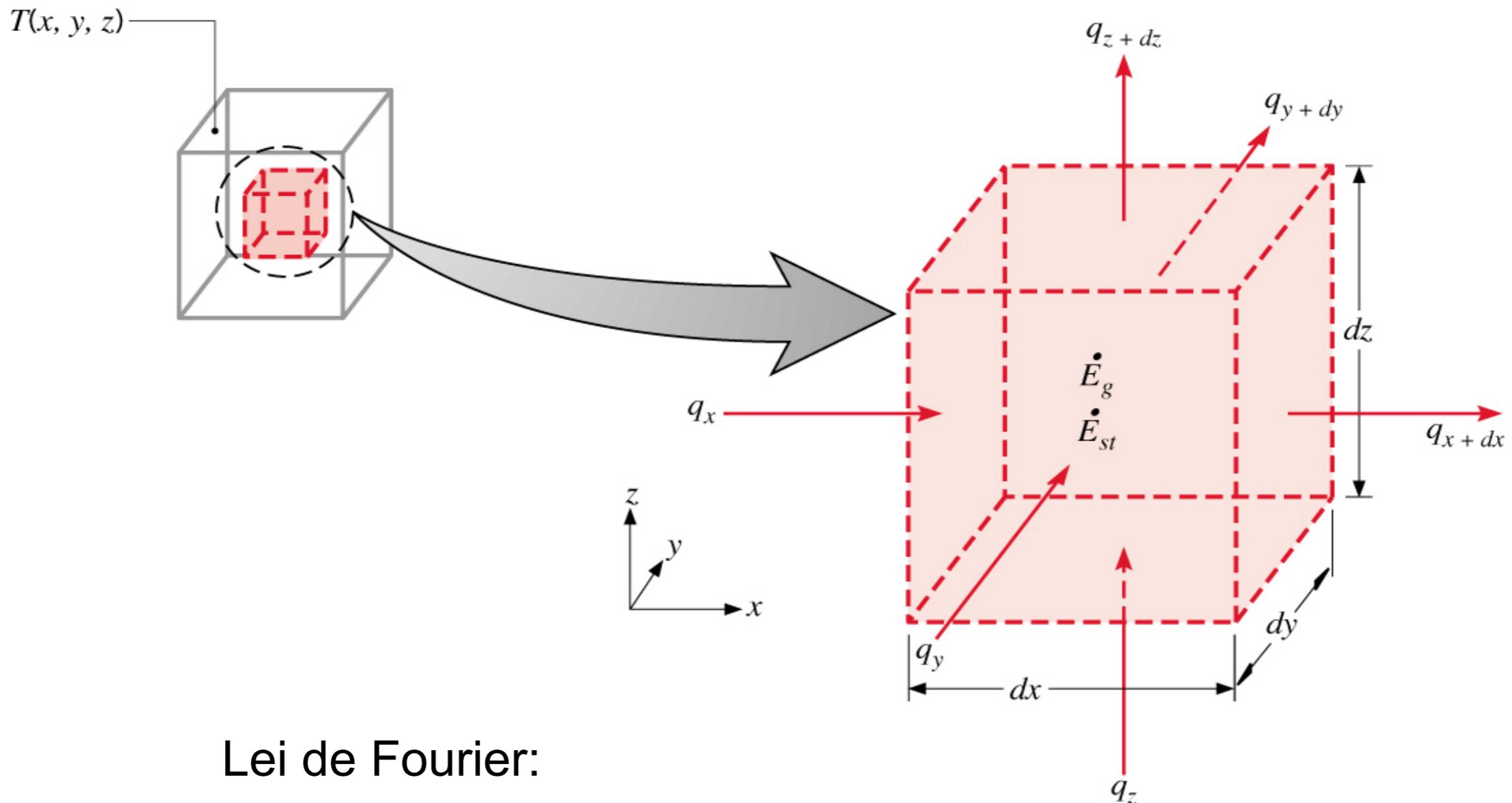
## Então o fluxo de calor é um vetor?

Sim, pois o gradiente de temperatura também é um vetor.

## Qual o significado do sinal negativo na expressão acima ?

Ele indica que o fluxo de calor é da superfície de maior para a de menor temperatura, isto é, contrário ao do gradiente.

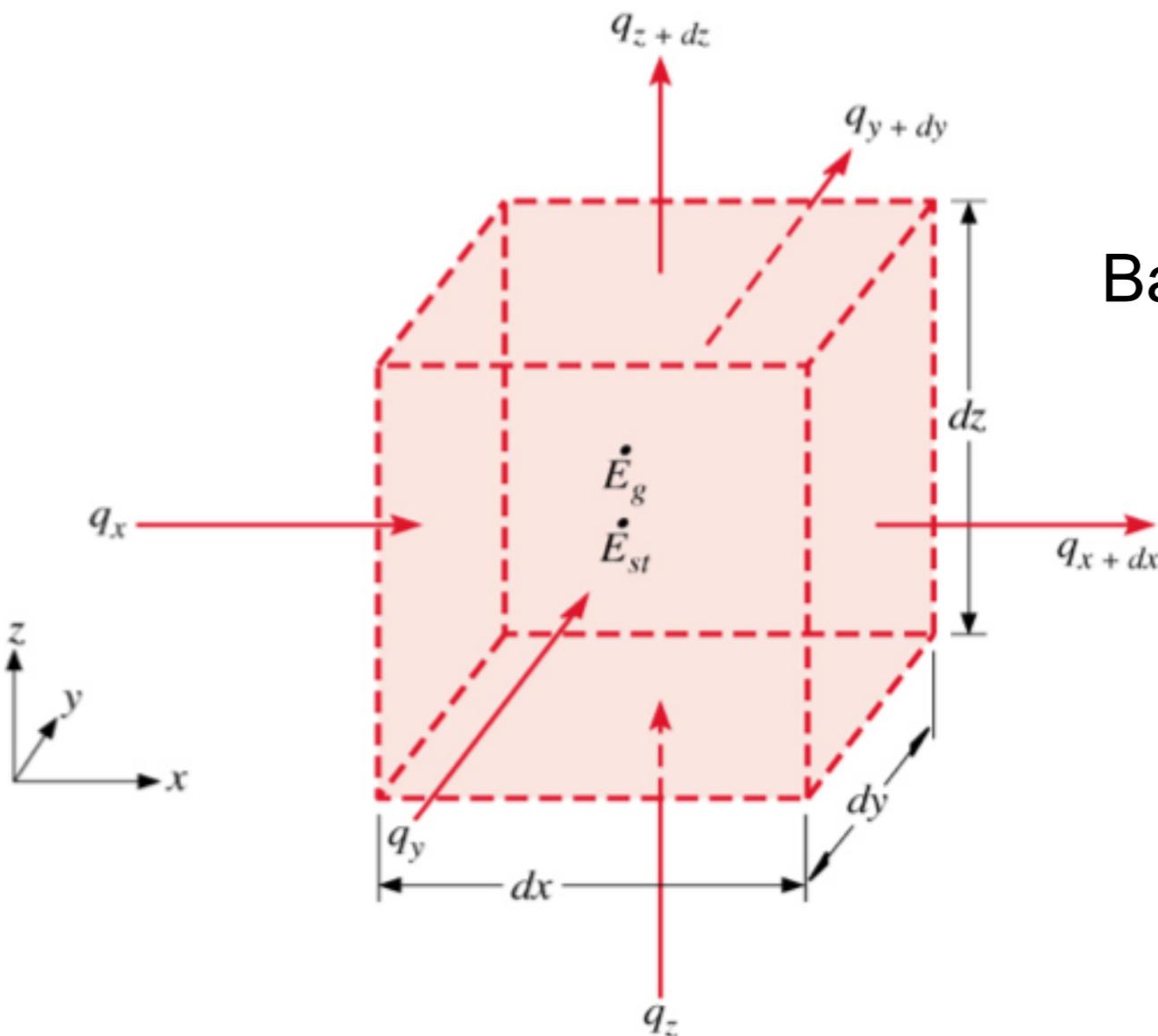
Partimos de um volume de controle diferencial:



Lei de Fourier:



$$\vec{q}'' = - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$



Balanço de energia:

$$q_x - q_{x+dx} + q_y - q_{y+dy} + q_z - q_{z+dz} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz$$

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Expansão em série de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \frac{\partial^3 q_x}{\partial x^3} \frac{dx^3}{3!} + \dots$$



Balanço de energia:

$$q_x - q_{x+dx} + q_y - q_{y+dy} + q_z - q_{z+dz} + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (1)$$

Expansão em série de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \frac{\partial^3 q_x}{\partial x^3} \frac{dx^3}{3!} + \dots$$

No limite desprezamos os termos de ordem superior:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2)$$



Substituindo 2 em 1, e aplicando o mesmo procedimento para as direções x e y:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (3)$$

Aplicando a Lei de Fourier em (3):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \right) dx - \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \right) dy - \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \right) dz + \\ & + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \end{aligned}$$

Dividindo pelo volume, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



Chegamos em:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

O que significa cada termo na equação acima?

Taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume de controle unitário;

Taxa volumétrica de geração de energia térmica;

Taxa de variação da energia térmica acumulada no interior do volume de controle.

Faça a análise dimensional de cada um dos termos da equação anterior!



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

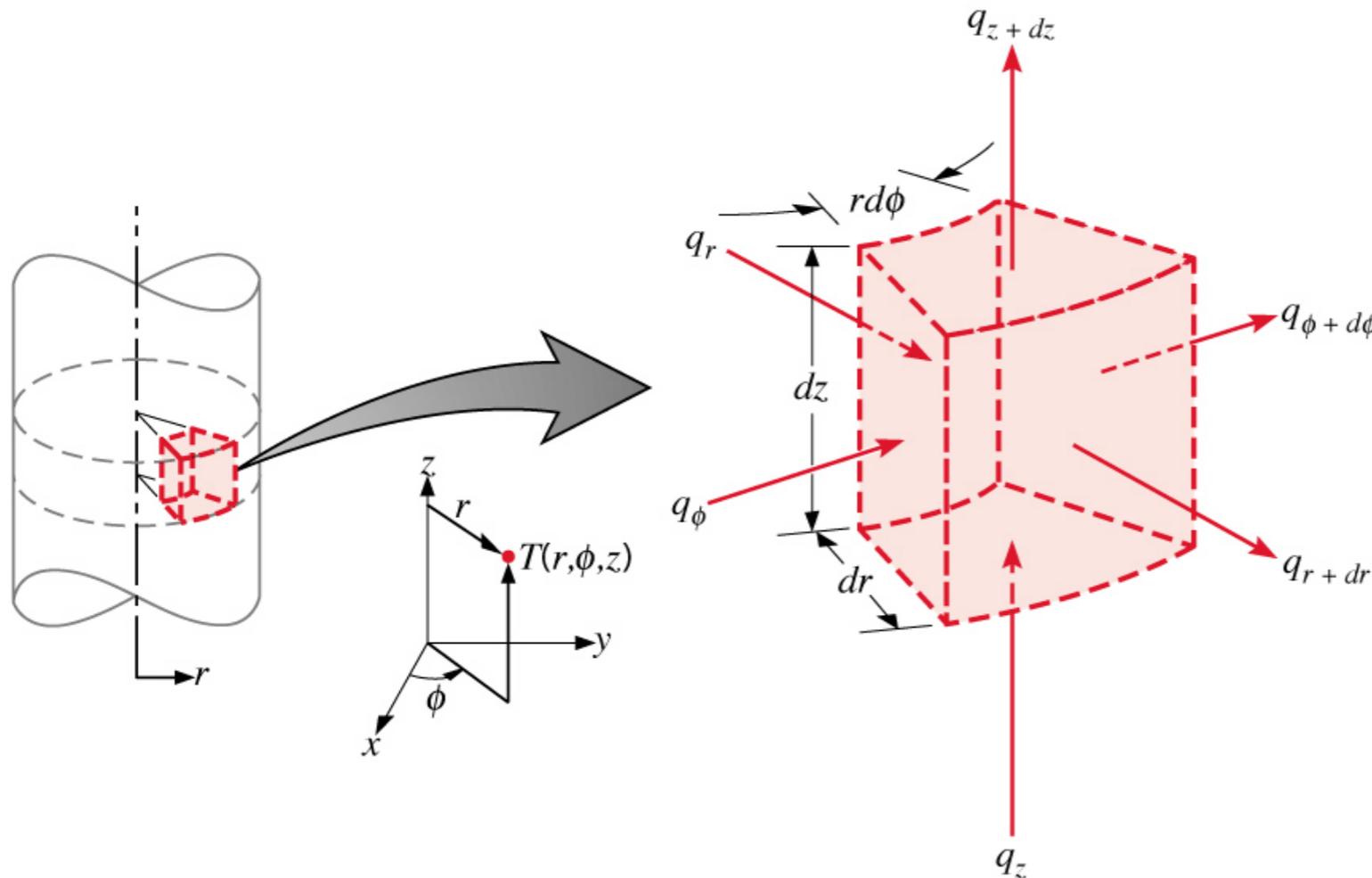
Observações:

Trata-se de uma equação diferencial parcial de segunda ordem no espaço e primeira ordem no tempo;

Para sua solução precisamos de duas condições de contorno para cada direção;

Para sua solução precisamos, adicionalmente, de uma condição inicial.

# Equação geral da condução em coordenadas cilíndricas



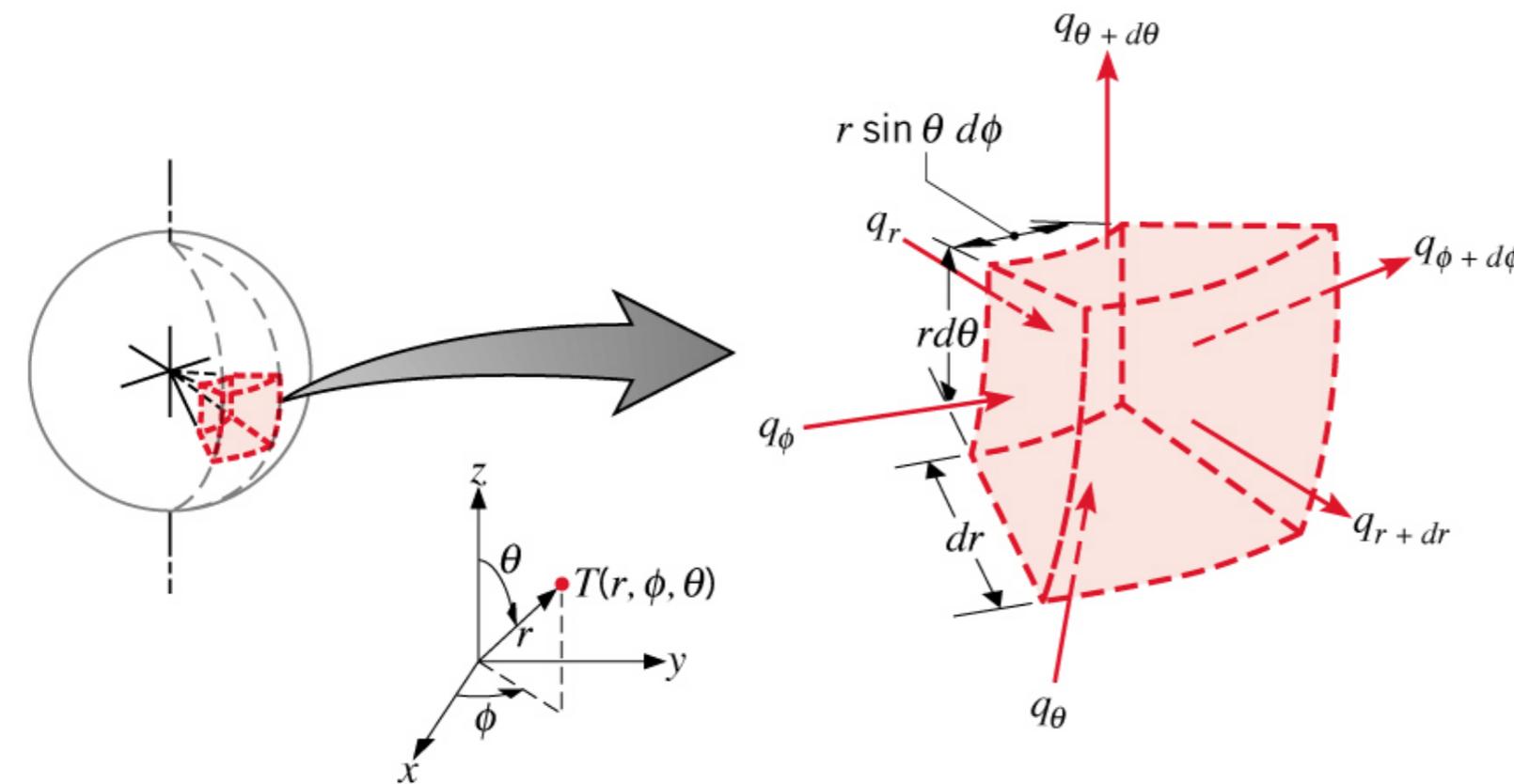
Lei de Fourier:

$$\vec{q}'' = - \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{i} + k \frac{\partial T}{r \partial \phi} \vec{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Deduza a expressão anterior a título de exercício!

# Equação geral da condução em coordenadas esféricas



Lei de Fourier:

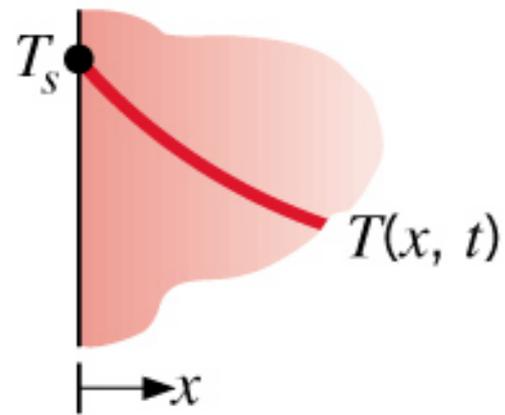
$$\vec{q}'' = - \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{i} + k \frac{\partial T}{r \partial \theta} \vec{j} + k \frac{\partial T}{r \sin \theta \partial \phi} \vec{k} \right)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Deduza a expressão anterior a título de exercício!

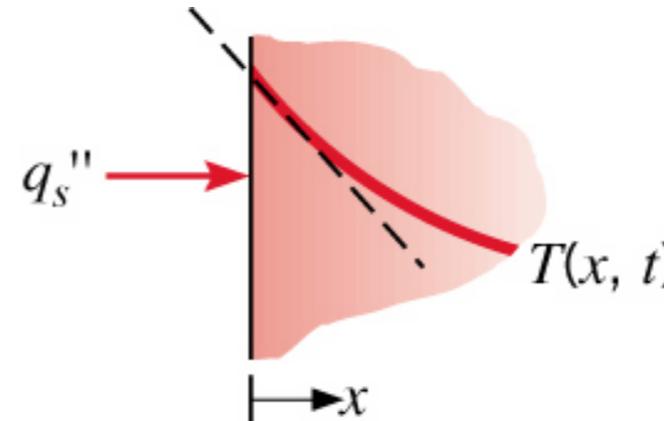


Temperatura superficial constante



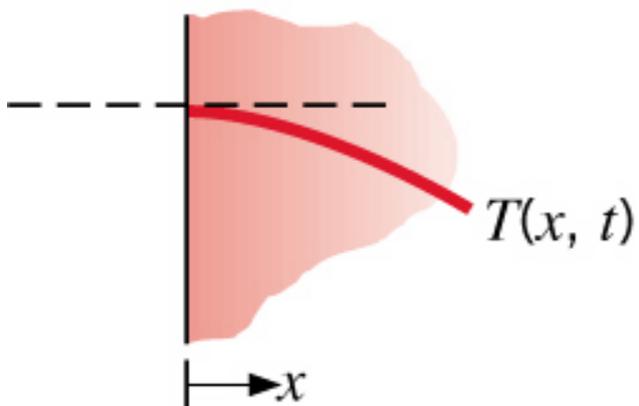
$$T(0, t) = T_s$$

Fluxo de calor constante



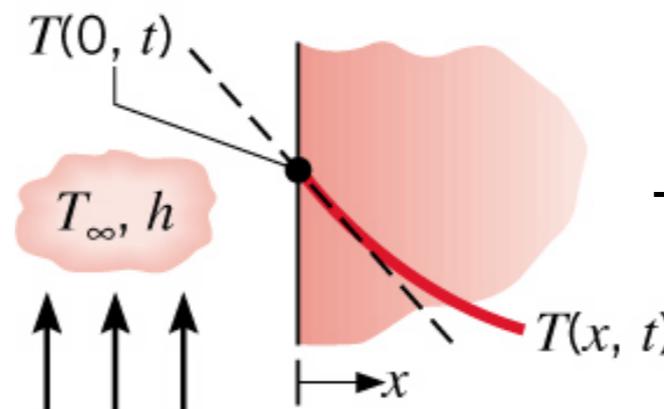
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$

Superfície adiabática



$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

Convecção na superfície



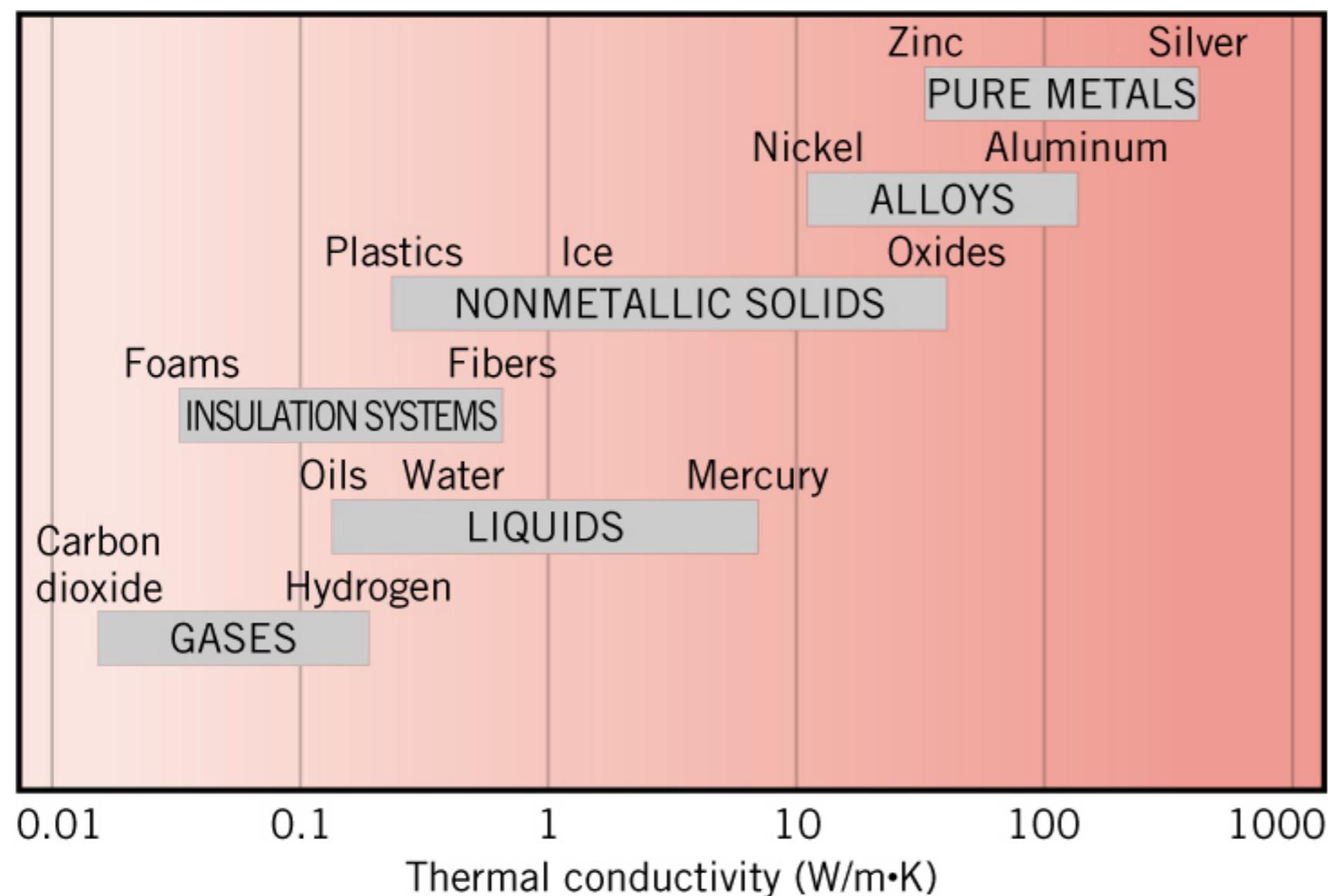
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)]$$



# Propriedades termofísicas

**Condutividade térmica:** medida da habilidade do material em transferir energia térmica por condução.

**Difusividade térmica:** medida da habilidade de uma material em responder a mudanças no ambiente térmico.



## Tabela de propriedades:

*Sólidos:* Tabelas A.1 – A.3

*Gases:* Tabelas A.4

*Líquidos:* Tabelas A.5 – A.7

# Propriedades termofísicas de alguns metais sólidos (Tab. A.1)



Composition	Melting Point (K)	Properties at Various Temperatures (K)													
		Properties at 300 K				$k$ (W/m · K)/ $c_p$ (J/kg · K)									
		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_p$ (J/kg · K)	$k$ (W/m · K)	$\alpha \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	100	200	400	600	800	1000	1200	1500	2000	2500
Aluminum															
Pure	933	2702	903	237	97.1	302	237	240	231	218					
						482	798	949	1033	1146					
Alloy 2024-T6 (4.5% Cu, 1.5% Mg, 0.6% Mn)	775	2770	875	177	73.0	65	163	186	186						
						473	787	925	1042						
Alloy 195, Cast (4.5% Cu)		2790	883	168	68.2			174	185						
								—	—						
Beryllium	1550	1850	1825	200	59.2	990	301	161	126	106	90.8	78.7			
						203	1114	2191	2604	2823	3018	3227	3519		
Bismuth	545	9780	122	7.86	6.59	16.5	9.69	7.04							
						112	120	127							
Boron	2573	2500	1107	27.0	9.76	190	55.5	16.8	10.6	9.60	9.85				
						128	600	1463	1892	2160	2338				
Cadmium	594	8650	231	96.8	48.4	203	99.3	94.7							
						198	222	242							
Chromium	2118	7160	449	93.7	29.1	159	111	90.9	80.7	71.3	65.4	61.9	57.2	49.4	
						192	384	484	542	581	616	682	779	937	
Cobalt	1769	8862	421	99.2	26.6	167	122	85.4	67.4	58.2	52.1	49.3	42.5		
						236	379	450	503	550	628	733	674		

$= 26,6 \times 10^{-6}$

K  $\rightarrow$   $\leftarrow$   $c_p$

# Propriedades termofísicas de alguns isolantes (Tab. A.3)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

## *Insulating Materials and Systems*

### Typical Properties at 300 K

Description/Composition	Density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Thermal Conductivity, $k$ (W/m · K)	Specifi Heat, $c_p$ (J/kg · K)
<b>Blanket and Batt</b>			
Glass fiber, paper faced	16	0.046	—
	28	0.038	—
	40	0.035	—
Glass fiber, coated; duct liner	32	0.038	835
<b>Board and Slab</b>			
Cellular glass	145	0.058	1000
Glass fiber, organic bonded	105	0.036	795
Polystyrene, expanded			
Extruded (R-12)	55	0.027	1210
Molded beads	16	0.040	1210
Mineral fiberboard; roofing material	265	0.049	—
Wood, shredded/cemented	350	0.087	1590
Cork	120	0.039	1800
<b>Loose Fill</b>			
Cork, granulated	160	0.045	—
Diatomaceous silica, coarse	350	0.069	—
Powder	400	0.091	—
Diatomaceous silica, fine powder	200	0.052	—
	275	0.061	—
Glass fiber, poured or blown	16	0.043	835
Vermiculite, flakes	80	0.068	835
	160	0.063	1000

# Propriedades termofísicas de gases (Tab. A.4)



$T$ (K)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_p$ (kJ/kg · K)	$\mu \cdot 10^7$ (N · s/m <sup>2</sup> )	$\nu \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	$k \cdot 10^3$ (W/m · K)	$\alpha \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	$Pr$
<b>Air, <math>\mathcal{M} = 28.97</math> kg/kmol</b>							
100	3.5562	1.032	71.1	2.00	9.34	2.54	0.786
150	2.3364	1.012	103.4	4.426	13.8	5.84	0.758
200	1.7458	1.007	132.5	7.590	18.1	10.3	0.737
250	1.3947	1.006	159.6	11.44	22.3	15.9	0.720
300	1.1614	1.007	184.6	15.89	26.3	22.5	0.707
350	0.9950	1.009	208.2	20.92	30.0	29.9	0.700
400	0.8711	1.014	230.1	26.41	33.8	38.3	0.690
450	0.7740	1.021	250.7	32.39	37.3	47.2	0.686
500	0.6964	1.030	270.1	38.79	40.7	56.7	0.684
550	0.6329	1.040	288.4	45.57	43.9	66.7	0.683
600	0.5804	1.051	305.8	52.69	46.9	76.9	0.685
650	0.5356	1.063	322.5	60.21	49.7	87.3	0.690
700	0.4975	1.075	338.8	68.10	52.4	98.0	0.695
750	0.4643	1.087	354.6	76.37	54.9	109	0.702
800	0.4354	1.099	369.8	84.93	57.3	120	0.709

$= 57,3 \times 10^{-3}$

# Propriedades termofísicas de líquidos saturados (Tab. A.5)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

## Saturated Liquids

$T$ (K)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_p$ (kJ/kg·K)	$\mu \cdot 10^2$ (N·s/m <sup>2</sup> )	$\nu \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	$k \cdot 10^3$ (W/m·K)	$\alpha \cdot 10^7$ (m <sup>2</sup> /s)	$Pr$	$\beta \cdot 10^3$ (K <sup>-1</sup> )
<b>Engine Oil (Unused)</b>								
273	899.1	1.796	385	4280	147	0.910	47,000	0.70
280	895.3	1.827	217	2430	144	0.880	27,500	0.70
290	890.0	1.868	99.9	1120	145	0.872	12,900	0.70
300	884.1	1.909	48.6	550	145	0.859	6400	0.70
310	877.9	1.951	25.3	288	145	0.847	3400	0.70
320	871.8	1.993	14.1	161	143	0.823	1965	0.70
330	865.8	2.035	8.36	96.6	141	0.800	1205	0.70
340	859.9	2.076	5.31	61.7	139	0.779	793	0.70
350	853.9	2.118	3.56	41.7	138	0.763	546	0.70
360	847.8	2.161	2.52	29.7	138	0.753	395	0.70
370	841.8	2.206	1.86	22.0	137	0.738	300	0.70
380	836.0	2.250	1.41	16.9	136	0.723	233	0.70
390	830.6	2.294	1.10	13.3	135	0.709	187	0.70
400	825.1	2.337	0.874	10.6	134	0.695	152	0.70
410	818.9	2.381	0.698	8.52	133	0.682	125	0.70
420	812.1	2.427	0.564	6.94	133	0.675	103	0.70
430	806.5	2.471	0.470	5.83	132	0.662	88	0.70

# Propriedades termofísicas da água saturada (Tab. A.6)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

Temperature, $T$ (K)	Pressure, $p$ (bars) <sup>b</sup>	Specific Volume (m <sup>3</sup> /kg)		Heat of Vaporization, $h_{fg}$ (kJ/kg)	Specific Heat (kJ/kg · K)		Viscosity (N · s/m <sup>2</sup> )		Thermal Conductivity (W/m · K)		Prandtl Number		Surface Tension, $\sigma_f \cdot 10^3$ (N/m)	Expansion Coefficient, $\beta_f \cdot 10^6$ (K <sup>-1</sup> )	Temperature, $T$ (K)
		$v_f \cdot 10^3$	$v_g$		$c_{p,f}$	$c_{p,g}$	$\mu_f \cdot 10^6$	$\mu_g \cdot 10^6$	$k_f \cdot 10^3$	$k_g \cdot 10^3$	$Pr_f$	$Pr_g$			
273.15	0.00611	1.000	206.3	2502	4.217	1.854	1750	8.02	569	18.2	12.99	0.815	75.5	-68.05	273.15
275	0.00697	1.000	181.7	2497	4.211	1.855	1652	8.09	574	18.3	12.22	0.817	75.3	-32.74	275
280	0.00990	1.000	130.4	2485	4.198	1.858	1422	8.29	582	18.6	10.26	0.825	74.8	46.04	280
285	0.01387	1.000	99.4	2473	4.189	1.861	1225	8.49	590	18.9	8.81	0.833	74.3	114.1	285
290	0.01917	1.001	69.7	2461	4.184	1.864	1080	8.69	598	19.3	7.56	0.841	73.7	174.0	290
295	0.02617	1.002	51.94	2449	4.181	1.868	959	8.89	606	19.5	6.62	0.849	72.7	227.5	295
300	0.03531	1.003	39.13	2438	4.179	1.872	855	9.09	613	19.6	5.83	0.857	71.7	276.1	300
305	0.04712	1.005	29.74	2426	4.178	1.877	769	9.29	620	20.1	5.20	0.865	70.9	320.6	305
310	0.06221	1.007	22.93	2414	4.178	1.882	695	9.49	628	20.4	4.62	0.873	70.0	361.9	310
315	0.08132	1.009	17.82	2402	4.179	1.888	631	9.69	634	20.7	4.16	0.883	69.2	400.4	315
320	0.1053	1.011	13.98	2390	4.180	1.895	577	9.89	640	21.0	3.77	0.894	68.3	436.7	320
325	0.1351	1.013	11.06	2378	4.182	1.903	528	10.09	645	21.3	3.42	0.901	67.5	471.2	325
330	0.1719	1.016	8.82	2366	4.184	1.911	489	10.29	650	21.7	3.15	0.908	66.6	504.0	330
335	0.2167	1.018	7.09	2354	4.186	1.920	453	10.49	656	22.0	2.88	0.916	65.8	535.5	335
340	0.2713	1.021	5.74	2342	4.188	1.930	420	10.69	660	22.3	2.66	0.925	64.9	566.0	340



Podemos escrever a expressão abaixo de uma forma mais enxuta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

ou

$$\text{div} \cdot (k \text{grad} T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Qual a vantagem de escrevermos a equação nesse formato?

A equação fica independente do sistema de coordenadas!



Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{k}$$

# Quadro resumo: operações com o vetor nabla (Cartesiano)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

# Quadro resumo: operações com o vetor nabla (cilíndrico)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} T = \left( \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{e}_r - \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

# Quadro resumo: operações com o vetor nabla (esférica)



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} T = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

# Equação geral da condução – casos particulares



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condutividade térmica constante:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Em uma forma mais enxuta:

$$k \left( \nabla^2 T \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



Condutividade térmica constante:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condução unidimensional em x:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



Condução unidimensional em  $x$ :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condução unidimensional, em regime permanente e sem geração de calor:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

A integração revela um perfil linear:

$$T(x) = ax + b$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno.



- Saber deduzir a equação da condução de calor em coordenadas cartesianas e cilíndricas;
- Entender o significado de cada um dos termos que aparece na equação da condução de calor;
- Entender os tipos de condição de contorno e sob quais condições práticas podem ser representadas por cada uma das condições;
- Saber escrever a equação da condução em termos do operador nabla;
- Saber simplificar as equações para o caso de meio isotrópico, regime permanente e condução unidimensional.



## Exercício 2.28 (6 ed.)

Um material semitransparente, com condutividade térmica  $k$  e espessura  $L$ , quando exposto à radiação laser, apresenta, em regime permanente, a seguinte distribuição de temperatura:

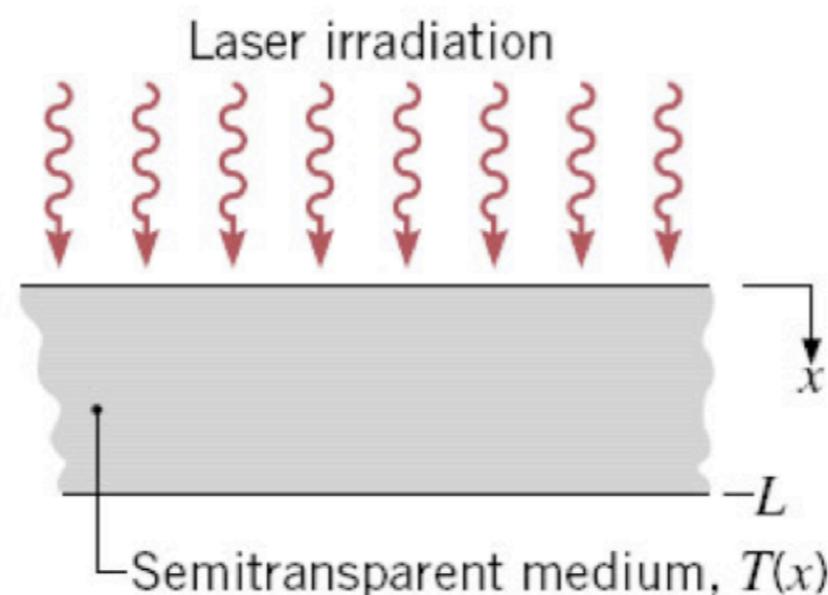
$$T(x) = -\frac{A}{ka^2} e^{-ax} + Bx + C$$

em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes conhecidas. Para essa situação, a absorção de radiação no material é representada por um termo de geração de calor distribuída.

(a) Obtenha expressões para os fluxos de calor por condução nas superfícies superior e inferior.

(b) Deduza uma expressão para  $q(x)$ .

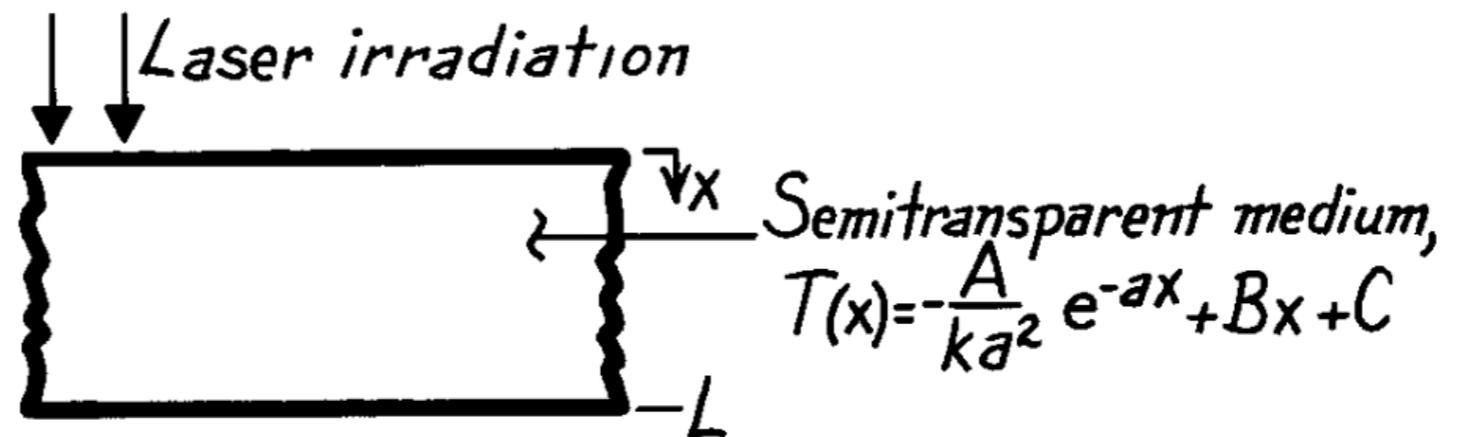
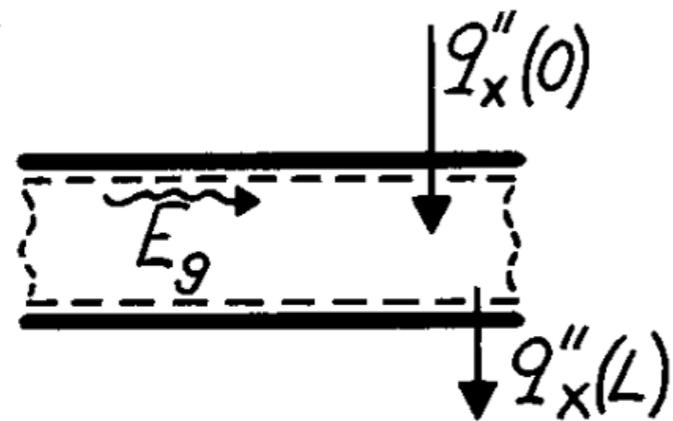
(c) Desenvolva uma expressão para a taxa de radiação absorvida em todo o material, por unidade de área superficial. Expresse seu resultado em termos das constantes conhecidas para a distribuição de temperatura, a condutividade térmica do material e sua espessura.





## Exercício 2.28

Distribuição de temperatura em um meio semi-transparente  
sujeito a um fluxo radiativo



**Hipóteses:** (1) Regime permanente, (2) condução unidimensional em  $x$ , (3) propriedades constantes, (4) toda a radiação é absorvida e pode ser representada por uma geração interna.



## Exercício 2.28

(a) Fluxos de calor nas faces:

**lei de Fourier:**  $q''_x = -k \left[ \frac{dT}{dx} \right] = -k \left[ -\frac{A}{ka^2} (-a) e^{-ax} + B \right]$

Superfície superior ( $x = 0$ ):  $q''_x(0) = -k \left[ +\frac{A}{ka} \cdot 1 + B \right] = -\left[ \frac{A}{a} + kB \right]$

Superfície inferior ( $x = L$ ):  $q''_x(L) = -k \left[ +\frac{A}{ka} e^{-aL} + B \right] = -\left[ \frac{A}{a} e^{-aL} + kB \right]$



## Exercício 2.28

### (b) Geração interna

Eq. geral da condução:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$  or  $\dot{q} = -k \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right)$

$$\dot{q}(x) = -k \frac{d}{dx} \left[ + \frac{A}{ka} e^{-ax} + B \right] = Ae^{-ax}$$

### (c) Energia absorvida

Balanço de energia:  $\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = 0$

$$\dot{E}_g'' = -\dot{E}_{in}'' + \dot{E}_{out}'' = -q_x''(0) + q_x''(L) = + \frac{A}{a} (1 - e^{-aL})$$

# Exercício 2.28



(c) Energia absorvida

Por integração:

$$\dot{E}_g'' = \int_0^L \dot{q}(x) dx = \int_0^L A e^{-ax} dx = -\frac{A}{a} \left[ e^{-ax} \right]_0^L = \frac{A}{a} (1 - e^{-aL})$$