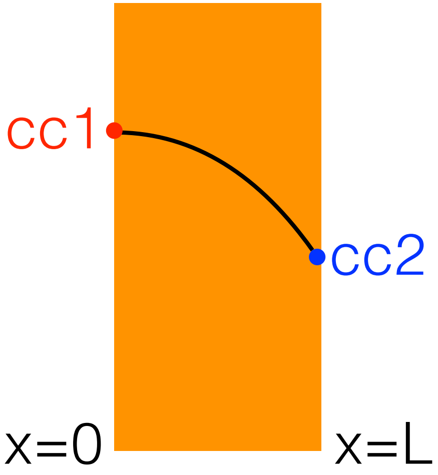
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Equação do Biocalor

Coordenadas cartesianas

Equação da condução

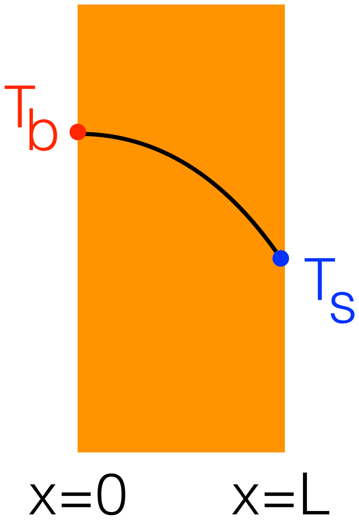
$$k\frac{d^2T}{dx^2}+\omega_b\rho_b c_b\left(T_{ar}-T\right)+\dot{q}=0$$



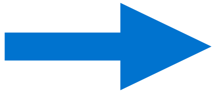
Caso	condição de contorno em x = 0	condição de contorno em x = L
A	Temperatura prescrita (T_b)	Convecção
B	Temperatura prescrita (T_b)	Temperatura prescrita (T_s)

Caso A

$$k\frac{d^2T}{dx^2}+\omega_b\rho_b c_b\left(T_{ar}-T\right)+\dot{q}=0$$



convecção +
radiação +
evaporação



h

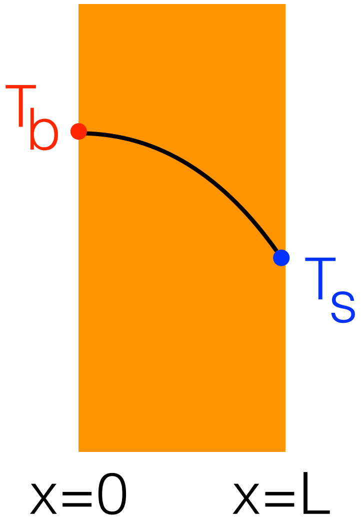
Condições de contorno:

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=h\left(T_s-T_\infty\right)$$

$$T\left(x=0\right)=T_b$$

Caso B

$$k\frac{d^2T}{dx^2}+\omega_b\rho_b c_b\left(T_{ar}-T\right)+\dot{q}=0$$



Condições de contorno:

$$T\left(x=0\right)=T_b$$

$$T\left(x=L\right)=T_s$$

Solução equação da condução

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}\left(T_{ar}-T\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

Mudança de variável:

$$\theta = T - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b\rho_b c_b} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}\theta = 0$$

Solução geral

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}\theta=0$$

Definindo: $m^2=\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$

Equação homogênea:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \theta=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}$$

ou

$$\theta=C_3\,\mathrm{senh}\left(mx\right)+C_4\cosh\left(mx\right)$$

Condições de contorno

Mudança de variável:

$$\theta = T - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}\theta = 0$$

Condições de contorno:

$$\theta_L\left(x = L\right) = T_s - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

ou

$$-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta_L - h\overset{\theta_\infty}{\boxed{\left(T_\infty - T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}\right)}}$$

$$\theta_b\left(x = 0\right) = T_b - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

Soluções

Caso	Distribuição de temperatura (θ / θ_b)
A	$\dfrac{\cosh m(L-x) + h/km \,\mathrm{senh}\, m(L-x) + h/km \,\dfrac{\theta_\infty}{\theta_b}\,\mathrm{senh}(mx)}{\cosh(mL) + h/km \,\mathrm{senh}(mL)}$
B	$\dfrac{(\theta_L/\theta_b)\,\mathrm{senh}\, mx + \mathrm{senh}\, m(L-x)}{\mathrm{senh}\, mL}$

$$\theta = T - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

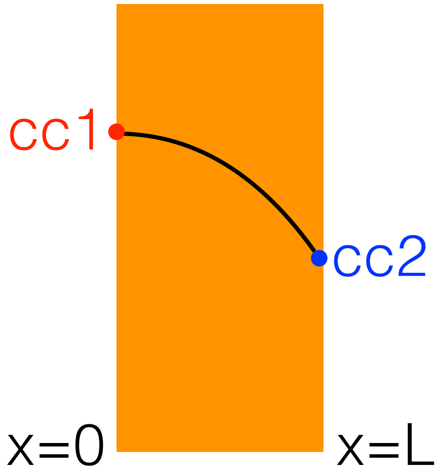
$$m^2 = \frac{\omega_b \rho_b c_b}{k}$$

$$M = \theta_b A_c \sqrt{k \omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_L = \theta(L) = T_s - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_\infty = T_\infty - T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$



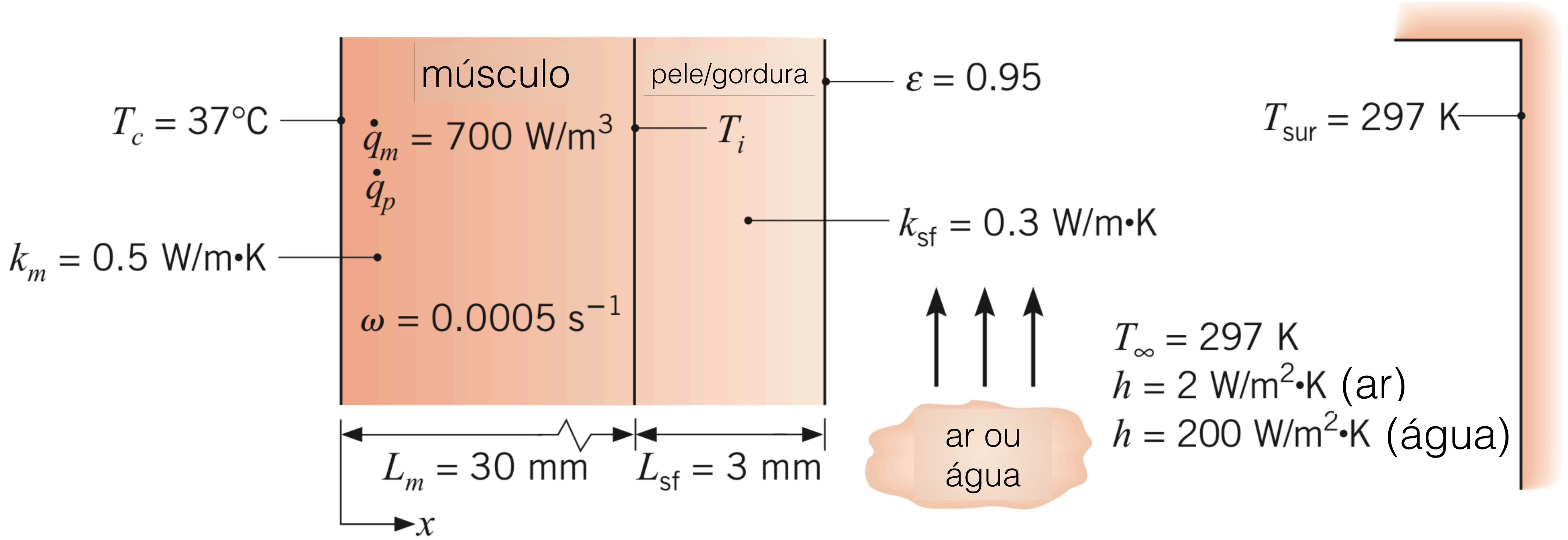
Exemplo

Considere uma região do músculo com uma camada de pele / gordura sobre ele. A uma profundidade de L_m = 30 mm no músculo podemos assumir que a temperatura é igual à temperatura corporal central T_c = 37 °C. A condutividade térmica muscular é k = 0,5 W / m-K. A taxa de geração de energia térmica dentro do músculo é q = 700 W / m^3. A taxa de perfusão é de 0,0005 s^{-1}; a massa específica e o calor específico do sangue são de 1000 kg/m^3 e 3600 J/kg-K, respectivamente, e a temperatura do sangue arterial T_a é a mesma que a temperatura corporal central. Considere uma pessoa com uma camada de pele / gordura de espessura L = 3 mm e condutividade térmica efetiva k = 0,3 W / m-K; perfusão e geração metabólica dentro desta camada podem ser desprezadas. A pessoa tem uma área de superfície de 1,8m^2 e está vestida com um maiô. A emissividade da pele é de 0,95. Pretende-se prever a taxa de perda de calor do corpo e a temperatura na superfície interna da camada de pele / gordura para ambientes de ar e água:

1. Quando a pessoa está em ar parado a T_∞ = 297 K, qual é a temperatura da superfície da pele e a taxa de perda de calor para o ambiente? A transferência de calor por convecção para o ar é caracterizada por um coeficiente de convecção livre de h = 2 W / m^2K.

2. Quando a pessoa está na água a T_∞ = 297 K, qual é a temperatura da superfície da pele e a taxa de perda de calor para o ambiente? A transferência de calor para a água é caracterizada por um coeficiente de convecção h = 200 W / m^2K.

Exemplo


músculo
pele/gordura
$T_c = 37°C$
$\dot{q}_m = 700 \text{ W/m}^3$
$\dot{q}_p$
$k_m = 0.5 \text{ W/m·K}$
$\omega = 0.0005 \text{ s}^{-1}$
T_i
$\varepsilon = 0.95$
$k_{sf} = 0.3 \text{ W/m·K}$
$T_{sur} = 297 \text{ K}$
$T_\infty = 297 \text{ K}$
$h = 2 \text{ W/m}^2\text{·K}$ (ar)
$h = 200 \text{ W/m}^2\text{·K}$ (água)
ar ou água
$L_m = 30 \text{ mm}$
$L_{sf} = 3 \text{ mm}$
x

Pele/gordura

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_{\text{tot}}}$$

$$R_{\text{tot}} = \frac{L_{\text{sf}}}{k_{\text{sf}}A} + \left(\frac{1}{1/hA} + \frac{1}{1/h_r A}\right)^{-1} = \frac{1}{A}\left(\frac{L_{\text{sf}}}{k_{\text{sf}}} + \frac{1}{h + h_r}\right)$$

ar: $R_{\text{tot}} = \frac{1}{1.8\ \text{m}^2}\left(\frac{0.003\ \text{m}}{0.3\ \text{W/m}\cdot\text{K}} + \frac{1}{(2 + 5.9)\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}}\right) = 0.076\ \text{K/W}$

água: $h_r = 0 \qquad h = 200\ \text{W/m}^2\cdot\text{K},\ R_{\text{tot}} = 0.0083\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}$

Músculo

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}\left(T_{ar}-T\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

Caso	Distribuição de temperatura (θ / θ_b)
A	$\dfrac{\cosh m\left(L-x\right)+{}^{h}\!/\!_{km}\,\mathrm{senh}\,m\left(L-x\right)+{}^{h}\!/\!_{km}\,\frac{\theta_\infty}{\theta_b}\,\mathrm{senh}\left(mx\right)}{\cosh\left(mL\right)+{}^{h}\!/\!_{km}\,\mathrm{senh}\left(mL\right)}$
B	$\dfrac{\left(\theta_L/\theta_b\right)\mathrm{senh}\,mx+\mathrm{senh}\,m(L-x)}{\mathrm{senh}\,mL}$

$$m^2=\frac{\omega_b\rho_b c_b}{k}$$

b = c

$L = L_m$

Músculo: taxa de t.c. na superfície

$$q = -k_m A \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L_m} = -k_m A \frac{d}{dx}\left[\theta_b \frac{\left(\theta_{L_m} / \theta_b\right)\operatorname{senh} mx + \operatorname{senh} m(L_m - x)}{\operatorname{senh} mL_m}\right]_{x=L_m}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta_b \frac{\left(\theta_{L_m} / \theta_b\right) m\cosh mx - m\cosh m(L_m - x)}{\operatorname{senh} mL} \Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L_m} = \theta_b \frac{\left(\theta_{L_m} / \theta_b\right) m\cosh mL_m - m}{\operatorname{senh} mL_m}$$

$$\boxed{q = -k_m A \theta_b m \frac{\left(\theta_{L_m} / \theta_b\right)\cosh mL_m - 1}{\operatorname{senh} mL_m}}$$

Músculo: temperatura externa

$$q = -k_m A \theta_b m \frac{\left(\theta_{L_m}/\theta_b\right)\cosh mL_m - 1}{\operatorname{senh} mL_m} = \frac{T_i - T_\infty}{R_{tot}}$$

$$\theta_b = T_c - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} = -\frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_{L_m} = T_i - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$-k_m A m R_{tot}\left(T_i - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}\right)\cosh mL_m + k_m A m R_{tot}\theta_b = T_i \operatorname{senh} mL_m - T_\infty \operatorname{senh} mL_m$$

$$-k_m A m R_{tot} T_i \cosh mL_m + k_m A m R_{tot}\left(T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}\right)\cosh mL_m + k_m A m R_{tot}\theta_b = T_i \operatorname{senh} mL_m - T_\infty \operatorname{senh} mL_m$$

$$T_i = \frac{k_m A m R_{tot}\left[\left(T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}\right)\cosh mL_m + \theta_b\right] + T_\infty \operatorname{senh} mL_m}{\operatorname{senh} mL_m + k_m A m R_{tot}\cosh mL_m}$$

Músculo

$$\tilde{m} = \sqrt{\omega \rho_b c_b / k_m} = [0.0005\ \mathrm{s}^{-1} \times 1000\ \mathrm{kg/m^3} \times 3600\ \mathrm{J/kg \cdot K} / 0.5\ \mathrm{W/m \cdot K}]^{1/2}$$

$$= 60\ \mathrm{m}^{-1}$$

$$\sinh(\tilde{m} L_m) = \sinh(60\ \mathrm{m}^{-1} \times 0.03\ \mathrm{m}) = 2.94$$

$$\cosh(\tilde{m} L_m) = \cosh(60\ \mathrm{m}^{-1} \times 0.03\ \mathrm{m}) = 3.11$$

$$\theta_b = T_c - T_a - \frac{\dot{q}_m}{\omega \rho_b c_b} = -\frac{\dot{q}_m}{\omega \rho_b c_b} = -\frac{700\ \mathrm{W/m^3}}{0.0005\ \mathrm{s}^{-1} \times 1000\ \mathrm{kg/m^3} \times 3600\ \mathrm{J/kg \cdot K}}$$

$$= -0.389\ \mathrm{K}$$

$$T_i = \frac{\begin{array}{c}\{24°\mathrm{C} \times 2.94 + 0.5\ \mathrm{W/m \cdot K} \times 1.8\ \mathrm{m^2} \times 60\ \mathrm{m}^{-1} \\ \times\ 0.076\ \mathrm{K/W}[-0.389°\mathrm{C} + (37°\mathrm{C} + 0.389°\mathrm{C}) \times 3.11]\}\end{array}}{2.94 + 0.5\ \mathrm{W/m \cdot K} \times 1.8\ \mathrm{m^2} \times 60\ \mathrm{m}^{-1} \times 0.076\ \mathrm{K/W} \times 3.11} = 34.8°\mathrm{C}$$

Músculo

para ar:

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_{\text{tot}}} = \frac{34.8^\circ\text{C} - 24^\circ\text{C}}{0.076\ \text{K/W}} = 142\ \text{W}$$

para água:

$$T_i = 28.2^\circ\text{C}$$

$$q = 514\ \text{W}$$

Apêndices

Funções hiperbólicas, dedução dos casos A e B

Funções hiperbólicas

Seno hiperbólico:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Cosseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica:

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\sinh 0 = 0 \qquad x \to \infty, \quad \sinh x = \infty$$

$$\cosh 0 = 1 \qquad x \to \infty, \quad \cosh x = \infty$$

$$\tanh 0 = 0 \qquad x \to \infty, \quad \tanh x \to 1$$

Propriedades:

$$\sinh' x = \cosh x \qquad \cosh' x = \sinh x$$

$$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(y)\cosh(x)$$

$$\cosh(x - y) = \cosh(x)\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$$

Dedução do caso A

$$\theta = C_1 \operatorname{senh}(mx) + C_2 \cosh(mx)$$

$$\theta = T - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b} \qquad \theta_\infty = T_\infty - T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

Mudança de variável nas condições de contorno:

$$T(x=0) = T_b \Rightarrow \theta(x=0) = \theta_b$$

$$-k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h\left(T_s - T_\infty\right) \Rightarrow -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta_L - h\theta_\infty$$

com:

$$\theta_b = \theta(x=0) = T_b - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_L = \theta(x=L) = T_s - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

Dedução do caso A

Partimos da solução:

$$\theta = C_1 \operatorname{senh}(mx) + C_2 \cosh(mx) \qquad (1)$$

Apliquemos as condições de contorno:

$$\theta_\infty = T_\infty - T_{ar} + \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta(x=0) = \theta_b \qquad \Rightarrow C_2 = \theta_b$$

$$-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta_L - h\theta_\infty$$

$$\Rightarrow -k\left[C_1 m \cosh(mx) + C_2 m \operatorname{senh}(mx)\right]_{x=L} = h\theta_L - h\theta_\infty$$

$$-km\left[C_1 \cosh(mL) + \theta_b \operatorname{senh}(mL)\right] = h\left[C_1 \operatorname{senh}(mL) + \theta_b \cosh(mL)\right] - h\theta_\infty$$

Dedução do caso A

$$-km\left[C_1\cosh\left(mL\right)+\theta_b\,\mathrm{senh}\left(mL\right)\right]=h\left[C_1\,\mathrm{senh}\left(mL\right)+\theta_b\cosh\left(mL\right)\right]-h\theta_\infty$$

$$-\left[C_1\cosh\left(mL\right)+\theta_b\,\mathrm{senh}\left(mL\right)\right]={}^{h}\!/_{km}\left[C_1\,\mathrm{senh}\left(mL\right)+\theta_b\cosh\left(mL\right)\right]-{}^{h}\!/_{km}\,\theta_\infty$$

$$C_1\left[{}^{h}\!/_{km}\,\mathrm{senh}\left(mL\right)+\cosh\left(mL\right)+\right]=-\theta_b\,\mathrm{senh}\left(mL\right)-{}^{h}\!/_{km}\,\theta_b\cosh\left(mL\right)+{}^{h}\!/_{km}\,\theta_\infty$$

$$C_1=-\theta_b\,\frac{\mathrm{senh}\left(mL\right)+{}^{h}\!/_{km}\cosh\left(mL\right)-{}^{h}\!/_{km}\,{}^{\theta_\infty}\!/_{\theta_b}}{\cosh\left(mL\right)+{}^{h}\!/_{km}\,\mathrm{senh}\left(mL\right)}\qquad A=-{}^{h}\!/_{km}\,\frac{\theta_\infty}{\theta_b}$$

Dedução do caso A

Substituindo em (1):

$$\theta = -\theta_b \frac{\operatorname{senh}(mL) + \frac{h}{km}\cosh(mL) + A}{\cosh(mL) + \frac{h}{km}\operatorname{senh}(mL)}\operatorname{senh}(mx) + \theta_b \cosh(mx)$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = -\frac{\operatorname{senh}(mL) + \frac{h}{km}\cosh(mL) + A}{\cosh(mL) + \frac{h}{km}\operatorname{senh}(mL)}\operatorname{senh}(mx) + \cosh(mx)$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{-\operatorname{senh}(mL)\operatorname{senh}(mx) - \frac{h}{km}\operatorname{senh}(mx)\cosh(mL) - A\operatorname{senh}(mx) + \frac{h}{km}\operatorname{senh}(mL)\cosh(mx) + \cosh(mL)\cosh(mx)}{\cosh(mL) + \frac{h}{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

Dedução do caso A

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{-\operatorname{senh}(mL)\operatorname{senh}(mx)-{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mx)\cosh(mL)+{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)\cosh(mx)+\cosh(mL)\cosh(mx)-A\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL)+{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{-\operatorname{senh}(mL)\operatorname{senh}(mx)+{}^{h}\!/_{km}\left[\operatorname{senh}(mL)\cosh(mx)-\operatorname{senh}(mx)\cosh(mL)\right]+\cosh(mL)\cosh(mx)-A\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL)+{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

Podemos usar a relação: $\operatorname{senh}(x-y)=\operatorname{senh}(x)\cosh(y)-\operatorname{senh}(y)\cosh(x)$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{-\operatorname{senh}(mL)\operatorname{senh}(mx)+{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}m(L-x)+\cosh(mL)\cosh(mx)-A\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL)+{}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

Dedução do caso A

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{-\operatorname{senh}(mL)\operatorname{senh}(mx) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh} m(L-x) + \cosh(mL)\cosh(mx) - A\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

Podemos usar a relação: $\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh} m(L-x) - A\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}$$

Nossa solução fica:

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh} m(L-x) + {}^{h}\!/_{km}\,\frac{\theta_\infty}{\theta_b}\operatorname{senh}(mx)}{\cosh(mL) + {}^{h}\!/_{km}\operatorname{senh}(mL)}}$$

Dedução do caso B

Partimos da solução:

$$\theta = C_1 \operatorname{senh}\left(mx\right) + C_2 \cosh\left(mx\right) \qquad (1)$$

Apliquemos as condições de contorno:

$$\theta_b = \theta\left(x = 0\right) = T_b - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta_L = \theta\left(x = L\right) = T_s - T_{ar} - \frac{\dot{q}}{\omega_b \rho_b c_b}$$

$$\theta\left(x = 0\right) = \theta_b \qquad \Rightarrow C_2 = \theta_b$$

$$\theta\left(x = L\right) = \theta_L \qquad \Rightarrow \theta_L = C_1 \operatorname{senh}\left(mL\right) + \theta_b \cosh\left(mL\right)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\theta_L - \theta_b \cosh\left(mL\right)}{\operatorname{senh}\left(mL\right)}$$

Dedução do caso B

Substituindo em (1):

$$\theta = \frac{\theta_L - \theta_b \cosh(mL)}{\operatorname{senh}(mL)} \operatorname{senh}(mx) + \theta_b \cosh(mx)$$

$$\theta = \frac{\theta_L \operatorname{senh}(mx) - \theta_b \operatorname{senh}(mx)\cosh(mL) + \theta_b \operatorname{senh}(mL)\cosh(mx)}{\operatorname{senh}(mL)}$$

$$\theta = \frac{\theta_L \operatorname{senh}(mx) + \theta_b \left[\operatorname{senh}(mL)\cosh(mx) - \operatorname{senh}(mx)\cosh(mL)\right]}{\operatorname{senh}(mL)}$$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\theta_L / \theta_b \operatorname{senh}(mx) + \operatorname{senh} m(L - x)}{\operatorname{senh}(mL)}}$$