

Capítulo 2

Estabilidade Nominal em Malha Fechada

Neste capítulo, apresenta-se como se analisar a estabilidade de um sistema em malha fechada do ponto de vista entrada-saída, que é Critério de Estabilidade de Nyquist. Apresenta-se também como relacionar o gráfico/diagrama de Nyquist à função sensibilidade complementar (malha fechada) para o caso SISO. Apresentam-se também as margens de estabilidade (margens de ganho e de fase) para sistemas SISO e como estas são usadas para medir a robustez de um sistema em malha fechada. Apresenta-se então uma forma mais adequada de se medir robustez, através de uma margem de estabilidade nova a partir da função sensibilidade S de malha fechada. Por fim, pre

2.1 Introdução

2.2 Gráficos de Nyquist

Dada uma função de transferência (por exemplo, a função de transferência em malha aberta $F(s) = G(s)H(s)$), esta pode ser encarada como uma função $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, como uma função entre o plano complexo (domínio de $F(s)$) e o plano complexo (imagem de $F(s)$). Em particular, se escolhermos $s = j\omega$ para $\omega \geq 0$, teremos que F mapeia a curva correspondente ao semi-eixo imaginário positivo a uma outra curva no plano imagem, conhecida como *gráfico de Nyquist*. A medida em que se caminha para cima no eixo imaginário, o valor da frequência vai aumentando. Da mesma forma, o vetor $F(j\omega)$ vai progredindo ao longo da curva imagem, onde $|F(j\omega)|$ é o comprimento do vetor, e $\angle F(j\omega)$ o ângulo com o semi-eixo real positivo, como pode ser visto na Fig. 2.1.

Pode-se dividir o gráfico de Nyquist aproximadamente em três regiões: 1) baixas frequências; 2) médias frequências e 3) altas frequências, da mesma forma que se faz com os diagramas de Bode. Seja uma função de transferência genérica da forma:

$$F(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \cdots}{(j\omega)^N (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots}, \text{ com } K > 0$$

onde o grau do polinômio do numerador é menor que o do denominador. O comprimento do vetor $F(j\omega)$ em função de ω é dado por:

$$|F(j\omega)| = \frac{K|1 + j\omega T_a||1 + j\omega T_b| \cdots}{|\omega|^N |1 + j\omega T_1||1 + j\omega T_2| \cdots}$$

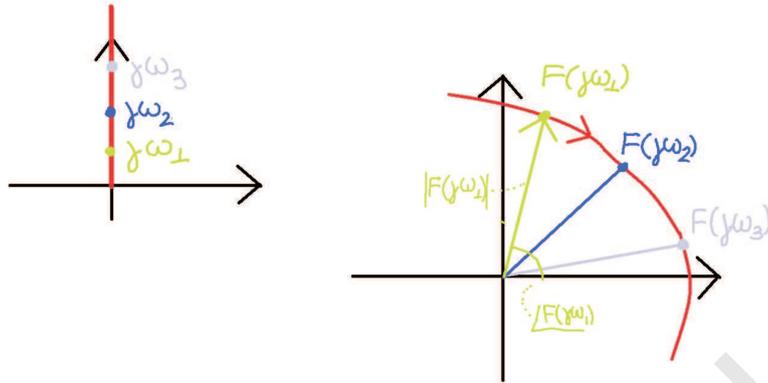


Figura 2.1: $F(j\omega)$ como mapeamento de curvas

e o ângulo em função de ω é:

$$\angle F(j\omega) = \angle K + \angle(1 + j\omega T_a) + \angle(1 + j\omega T_b) + \dots - N90 - \angle(1 + \omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2) - \dots$$

Baixas Frequências

Para as baixas frequências, isto é $\omega \ll \min(T_1^{-1}, \dots, T_a^{-1}, \dots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K}{(j\omega)^N}$$

o que significa que, nas baixas frequências, o termo que domina são os correspondentes aos pólos e zeros na origem (integradores e derivadores). Ou seja, é o tipo do sistema que determina as características em baixas frequências.

Altas Frequências

Para as altas frequências, isto é $\omega \gg \max(T_1^{-1}, \dots, T_a^{-1}, \dots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K_a}{(j\omega)^{n-m}}$$

o que significa que o comportamento do gráfico é determinado pela diferença entre o número de pólos e de zeros da função de transferência. É possível ver que, como há mais pólos que zeros (por hipótese), o módulo sempre vai tender à origem. Porém, a fase pode ser bem diferente, pois $\angle F(j\omega) \simeq -(n - m)\angle(j\omega)$, ou seja:

1. $n - m = 1$, tem-se $\angle F(j\omega) \approx -90$ graus;
2. $n - m = 2$, tem-se $\angle F(j\omega) \approx -180$ graus;

e assim por diante. Isto significa que o gráfico, para $\omega \rightarrow \infty$, tende à origem por direções diferentes (sempre diferindo de 90 graus). Quando o número de pólos é igual ao de zeros, ele termina em algum valor real, e quando o número de zeros for maior que o de pólos (caso que não tem interesse neste curso, pois se tratam de sistemas não-causais) o gráfico termina no infinito.

Médias Frequências

Nas frequências médias, não há nenhuma aproximação assintótica de modo que geralmente deve se fazer somente um esboço do gráfico. O formato nas médias frequências vai depender da posição relativa de pólos e zeros. A seguir, apresentam-se alguns exemplos de esboço de gráficos de Nyquist.

Exemplo: O gráfico de Nyquist da função de transferência

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

é apresentado na figura 2.2. Como $\angle F(j\omega) = -90$ graus e $|F(j\omega)| = 1/|\omega|$, o gráfico de Nyquist tem que ser uma reta que começa no $-\infty$ e tende à origem e forma um ângulo de -90 graus com o semi-eixo real positivo. Trata-se portanto do semi-eixo imaginário negativo.

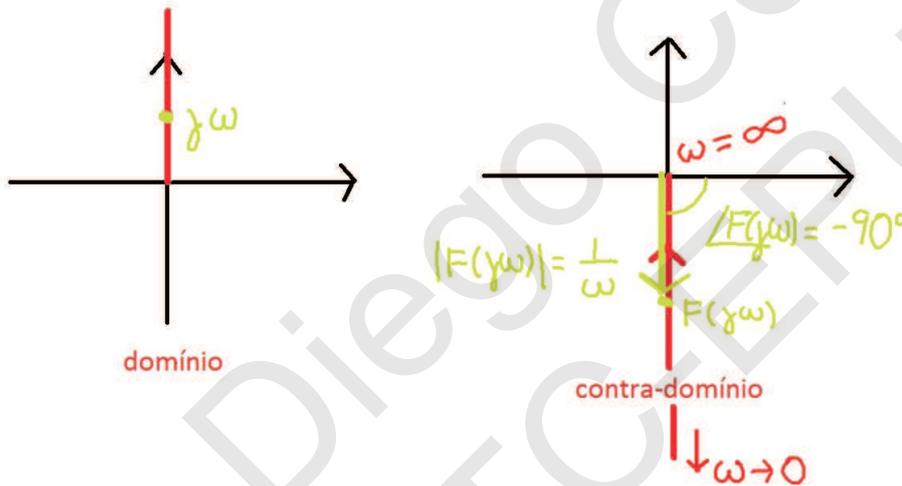


Figura 2.2: Nyquist do Integrador

Exemplo: O gráfico de Nyquist da função de transferência:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

é apresentado na figura 2.3. Para $\omega = 0$ temos $F(j0) = 1$, de modo que o gráfico de Nyquist começa em 1. Para $\omega \rightarrow \infty$ vemos que o gráfico termina na origem. Como a fase é $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T)$, vemos que a fase varia de 0 a -90 graus. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$, de modo que ele começa em 1 e vai decrescendo até 0.

Exemplo: Para o caso da função de transferência:

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

tem-se o gráfico de Nyquist laranja apresentado na figura 2.4. Como $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2)$, a fase começa em 0 graus e deve terminar em -180 graus. O gráfico

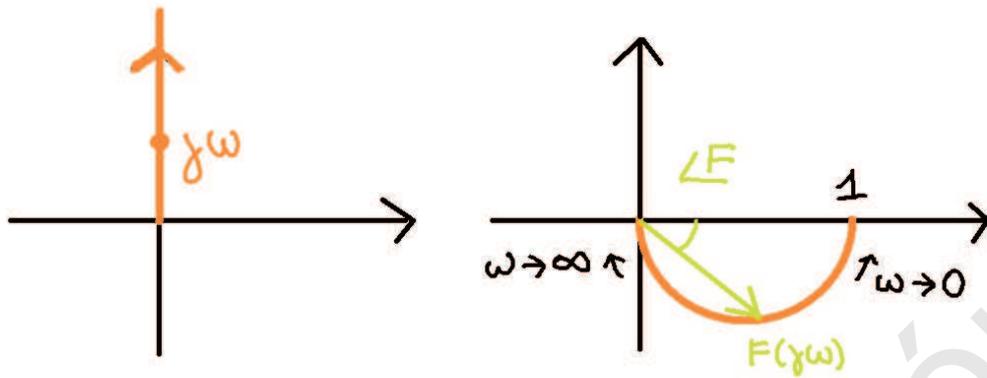


Figura 2.3: Diagrama de Nyquist de Pólo Real

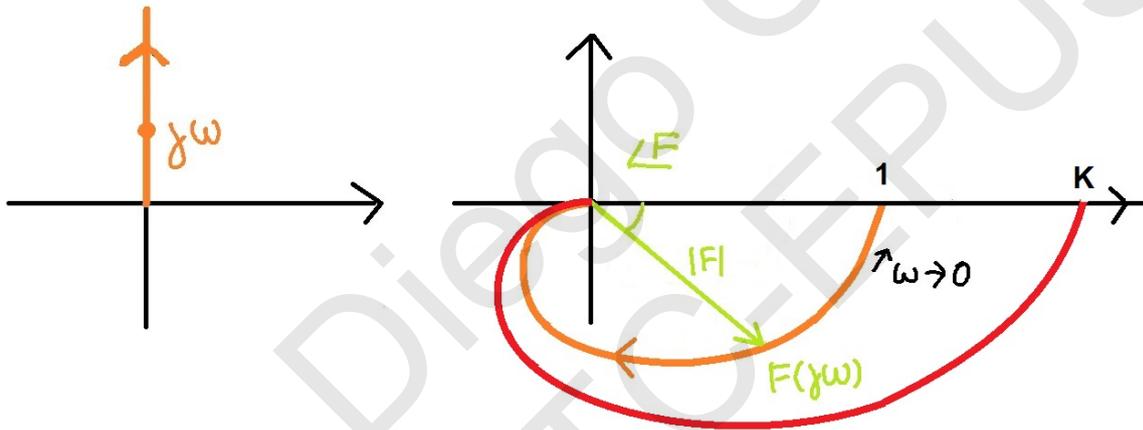


Figura 2.4: Diagrama de Nyquist de dois Pólos Reais

de módulo deve começar em 1 para $\omega = 0$ e terminar em 0 para $\omega \rightarrow \infty$. Se esta FT for multiplicada por $K > 0$, ou seja, for introduzido um ganho, tem-se que o novo gráfico de Nyquist fica como a curva em vermelho na mesma figura. A fase nunca é alterada, pois $\angle K = 0$.

Exemplo: Para o caso da função de transferência:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)}$$

tem-se que $\angle F(j\omega) = -\angle(j\omega) - \angle(1 + j\omega T) = -90 - \angle(1 + j\omega T)$. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$, de modo que para $\omega = 0$, tem-se que a fase é -90 graus e o módulo é ∞ . À medida que ω aumenta, o módulo vai caindo e a fase diminui até chegar em -180 graus. O gráfico de Nyquist apresentado na Fig. 2.5. Qual é o efeito de multiplicar a FT por $K > 0$?

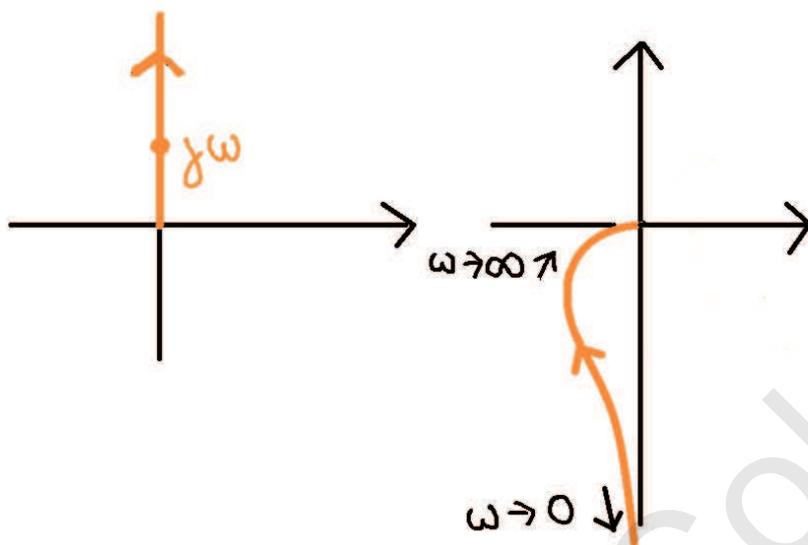


Figura 2.5: Diagrama de Nyquist de dois Pólos Reais

2.3 Princípio do Argumento

Uma boa forma de se explicar o princípio do argumento é através de um exemplo. Consideremos a função de transferência:

$$F(s) = \frac{(s - z_4)(s - z_5)(s - z_6)(s - z_7)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

Na Fig. 2.6 tem-se uma ilustração do princípio do argumento. No plano complexo do lado esquerdo (domínio), vê-se os desenhos dos vetores $(s - z_i)$ e $(s - p_j)$ que partem dos pólos e zeros de $F(s)$ e terminam no mesmo ponto s . $F(s)$ é dado por produtos e divisões destes vetores (já que são números complexos). Se fizermos o ponto s percorrer uma curva fechada em torno, por exemplo, do ponto z_5 , partindo do ponto s_1 e terminando em $s_2 \cong s_1$, o que se observa é que todos os vetores praticamente terminam no mesmo ângulo que começaram, porém o vetor $(s - z_5)$ dá uma volta completa de 360 graus no sentido horário, e $\angle F(s_2) - \angle F(s_1) = -360$ graus, o que corresponde a uma volta de $F(s)$ em torno da origem no sentido anti-horário.

Para o caso de s percorrer a circunferência cinza pontilhada, que dá uma volta no sentido horário, o deslocamento angular é:

$$\angle F(s_4) - \angle F(s_3) = -3 \times 360^\circ + 360^\circ = -720^\circ \quad (2.1)$$

o que corresponde a duas voltas no sentido horário. Note que no interior desta curva temos um polo e três zeros. É fácil notar que se a curva cinza fosse deformada para incluir p_2 , o vetor $(s - p_2)$ daria também uma volta completa, e o resultado de (2.1) teria sido -360 graus. Deste modo, podemos deduzir a seguinte regra:

Princípio 1 (do Argumento). *Supondo que a curva fechada no domínio está orientada no sentido horário, o número de voltas no sentido horário que $F(s)$ dá em torno da origem é igual ao número de zeros de $F(s)$ menos o número de pólos de $F(s)$ no interior da curva.*

É fácil verificar isso olhando-se para a curva cinza em Fig. 2.6.

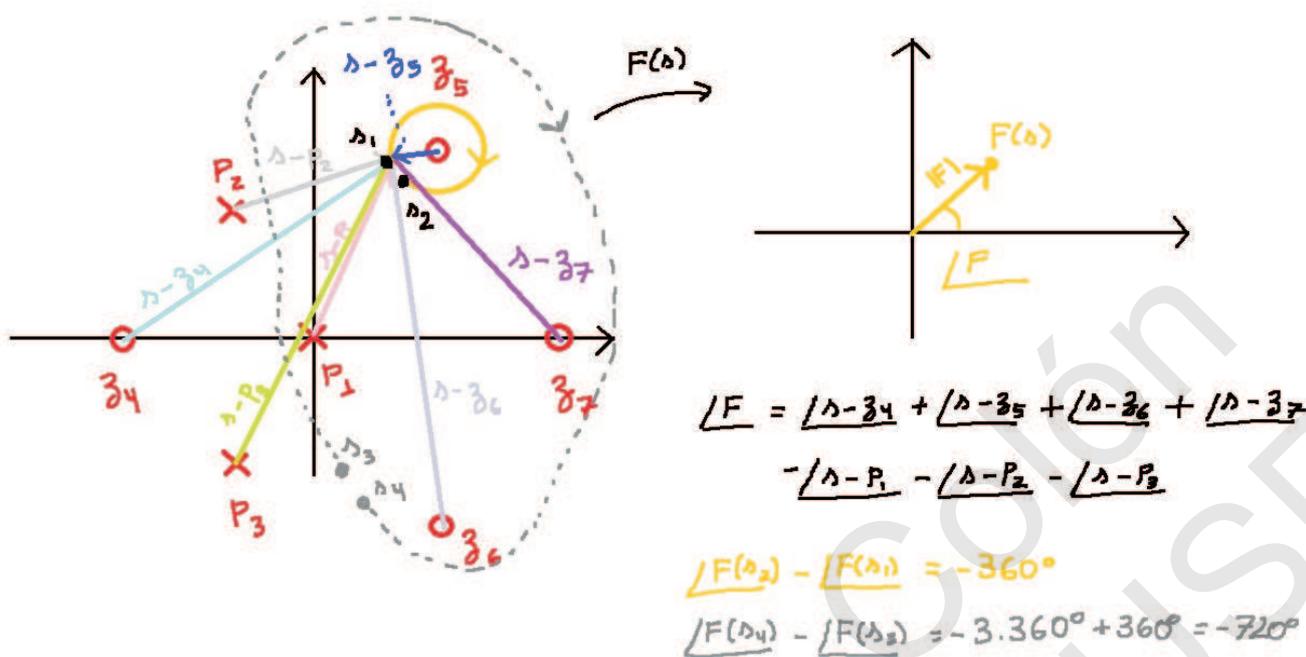


Figura 2.6: Princípio do Argumento

2.4 Análise de Estabilidade de um Sistema em Malha Fechada Usando o Princípio do Argumento: Critério de Estabilidade de Nyquist

Para que possamos analisar a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada usando o princípio do argumento, precisamos contar quantos pólos de malha fechada estão no semiplano direito. Os pólos de malha fechada são as raízes (ou zeros) da função $F(s) = 1 + G(s)K(s)$, que aparece no denominador das funções de transferência em malha fechada. Já os pólos de $F(s)$ são os pólos de malha aberta de $G(s)K(s)$, pois os pólos de ambos são os mesmos (verifique!).

Corolários 2.4.1. *Supondo uma curva fechada no domínio de $F(s)$ que está orientada no sentido horário, o número de voltas que $F(s) = 1 + G(s)K(s)$ dá em torno da origem no sentido horário é igual ao número de pólos de malha fechada menos o número de pólos de malha aberta no interior da curva.*

2.4.1 Contorno de Nyquist

Para analisar a estabilidade de um sistema em malha fechada, é necessário saber quantos pólos de malha fechada existem no semi-plano direito. Ou seja, é necessário saber quantos zeros de $F(s) = 1 + G(s)K(s)$ estão neste semi-plano. É necessário então um contorno que envolva o semiplano direito para se poder usar o princípio do argumento. Na figura 2.7a, tem-se o chamado *contorno de Nyquist*, que no limite para $R \rightarrow \infty$ envolve todo o SPD. Pode-se notar que este contorno é uma curva fechada que contém o eixo imaginário inteiro (no limite para $R \rightarrow \infty$, e ainda contém uma semi-circunferência de raio $R \rightarrow \infty$).

Podemos então reescrever o princípio do argumento da seguinte forma:

Corolários 2.4.2. *Supondo o contorno de Nyquist, o número de voltas que $G(s)K(s)$ dá*

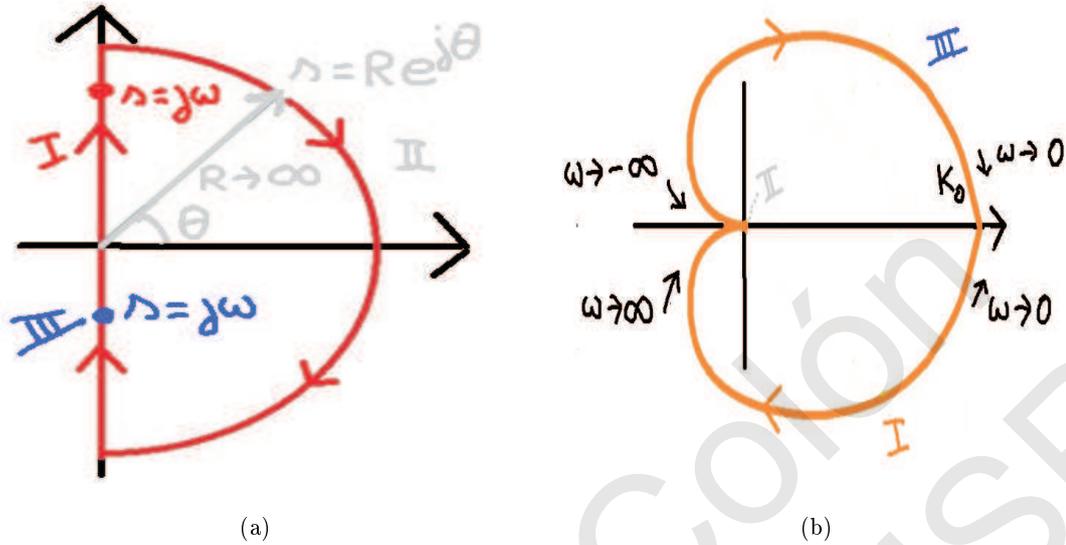


Figura 2.7: (a) Contorno de Nyquist (b) Gráfico de Nyquist para o exemplo.

em torno de -1 no sentido horário (ou seja, N) é igual ao número de pólos de malha fechada no SPD (ou seja, Z) menos o número de pólos de malha aberta no SPD (ou seja, P). Isso pode ser escrito como:

$$Z = N + P$$

Exemplo: Para o caso da função

$$G(s)(Ks) = \frac{K_0}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \text{ com } K_0, T_1, T_2 > 0 \quad (2.2)$$

como não há pólos no eixo imaginário, o contorno de Nyquist a ser utilizado é o apresentado na figura 2.7a. Deste nodo, o esboço pode ser dividido em três partes: A primeira parte corresponde à curva I, que é o semi-eixo imaginário positivo. Este diagrama já foi traçado na Fig. 2.4. A segunda parte do esboço corresponde à região II, que é a semi-circunferência de raio infinito, representada por $s = Re^{jθ}$. Fazendo-se a substituição na função em (2.2), tem-se:

$$G(Re^{jθ})K(Re^{jθ}) = \frac{K_0}{(1 + T_1Re^{jθ})(1 + T_2Re^{jθ})} \quad (2.3)$$

É fácil notar que no limite para $R \rightarrow \infty$, tem-se que $G(Re^{jθ})K(Re^{jθ}) = 0$, ou seja, para toda a semi-circunferência de raio infinito, o gráfico de Nyquist permanece na origem. Para o caso da região III, como s está no semi-eixo negativo, devido à propriedade que $G(-jω)K(-jω) = G^*(jω)K^*(jω)$, então o gráfico de Nyquist é o complexo conjugado do caso da região I, ou seja, simplesmente troca-se o sinal da parte imaginária. Deste modo, o gráfico de Nyquist para todo o contorno de Nyquist é apresentado na Fig. 2.7b

Nota-se que o ponto -1 não é envolvido nenhuma vez, de modo que $N = 0$. Da mesma forma, não existe nenhum pólo de malha aberta no semi-plano direito, o que significa que $P = 0$. Pelo critério de estabilidade de Nyquist, tem-se que $Z = P + N = 0$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para quaisquer valores de $K_0, T_1, T_2 > 0$.

É evidente que se os sinais destas constante fossem trocados, o gráfico de Nyquist ficaria diferente, Os valores de N e P também seriam. Nestes casos, o melhor é recomeçar o problema.

Exemplo: Para o caso da função de transferência:

$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(1+sT)}, \text{ com } K_0, T > 0 \quad (2.4)$$

o problema deve sofrer uma modificação, pois o contorno de Nyquist da Fig. 2.7a passa exatamente em cima do pólo que está na origem. A modificação que normalmente se adota é modificar o contorno de Nyquist de modo que este contorne o pólo na origem pela direita, conforme apresentado na Fig. 2.8a.

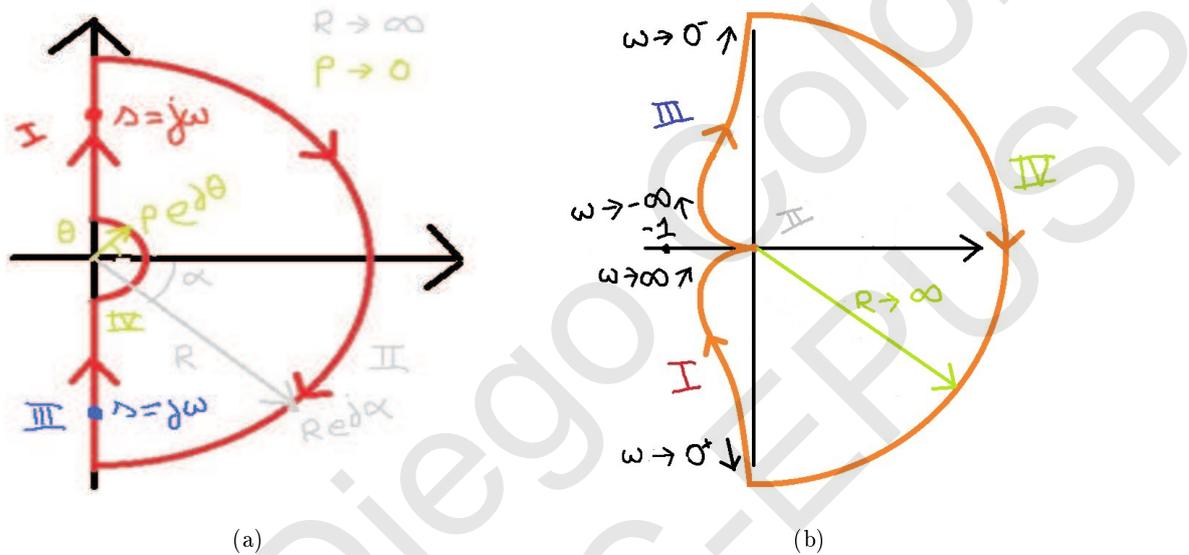


Figura 2.8: (a) Contorno de Nyquist Modificado (b) Gráfico de Nyquist para o exemplo.

Nota-se agora que há duas semi-circunferências: uma cujo raio tende para o infinito, ou seja, $R \rightarrow \infty$, e outra cujo raio tende a zero, ou seja, $\rho \rightarrow 0^+$. A semi-circunferência menor é a forma de se fazer o contorno do pólo na origem. Deste modo, o contorno de Nyquist passa a possuir quatro regiões distintas.

1. O contorno correspondente à região I já foi obtido anteriormente para esta função de transferência, e é apresentado na Fig. 2.5.
2. Para a região II, ocorre o mesmo que no problema anterior, ou seja, o gráfico de Nyquist permanece parado na origem enquanto o ponto s na Fig. 2.8a percorre a circunferência de raio infinito. Isso se deve ao fato de haver mais pólos do que zeros da função de transferência.
3. Para a região III, devido à simetria par do módulo e ímpar da fase, o gráfico é a imagem espelhada em relação ao eixo real.
4. Para o caso da região IV (que é a novidade deste exemplo), é necessário fazer a seguinte análise: supondo que s percorre IV, ele é expresso, nesta região por $s = \rho e^{j\alpha}$. A função de transferência nesta região fica então da forma:

$$G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) = \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}(1 + T_2 \rho e^{j\theta})} \quad (2.5)$$

Não podemos, entretanto, fazer diretamente $\rho = 0$ pois senão não conseguimos extrair toda a informação que necessitamos para traçar o gráfico para este trecho. Em vez disso, vamos assumir que ρ é um número bem pequeno (e positivo, obviamente). Neste caso, o termo $1 + T_2\rho e^{j\theta}$ fica aproximadamente igual a 1. Deste modo, tem-se que

$$G(\rho e^{j\theta})KH(\rho e^{j\theta}) \approx \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}} = \frac{K_0}{\rho} e^{-j\theta}$$

Trata-se então de um número complexo com um módulo muito grande (pois depende do inverso de ρ). Entretanto, precisamos analisar o ângulo deste número complexo: o que se pode notar da Fig. 2.8a é que o ângulo θ varia de -90 a 90 graus no sentido anti-horário (ponteiro amarelo). Devido ao sinal negativo na fase do número complexo $G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) \approx (K_0/\rho)e^{-j\theta}$, este deve descrever também uma semi-circunferência, porém com raio muito grande, e no sentido horário. Esta semi-circunferência deve começar no ponto final do trecho III e terminar no ponto inicial do trecho I, preservando o sentido e a continuidade da curva de Nyquist total. O gráfico de Nyquist total fica então como apresentado na Fig. 2.8b. Aplicando o critério de estabilidade de Nyquist, temos que $N = 0$ e $P = 0$, de modo que $Z = 0$, ou seja, o sistema é estável em malha fechada para qualquer $K_0 > 0$.

Exemplo: Para o caso da função de transferência em malha aberta da forma:

$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

aplicando-se as regras para o contorno de Nyquist apresentado na Fig. 2.8a, tem-se que há duas situações distintas para o diagrama de Nyquist, como pode ser visto na Fig. 2.9. Para o valor de ganho $K_0 = K$, tem-se que não há nenhum envolvimento de -1 , o que significa que $N = 0$, e como o sistema não tem pólos de malha aberta no semi-plano direito, tem-se que $P = 0$ e $Z = 0$, ou seja, não há pólos de malha fechada no SPD, e o sistema é estável em malha fechada. Já para o caso de ganho $K_0 = K' > K$, tem-se que $N = 2$, o que implica que $Z = 2$, ou seja, há dois pólos de malha fechada no SPD, e o sistema é instável em malha fechada. Esta situação pode ser confirmada desenhando-se o Lugar Geométrico das Raízes (LGR), que está no lado direito da figura. Nota-se que para o ganho K , todos os pólos de MF estão no SPE, e para o ganho K' , dois deles estarão no SPD, o que confirma a predição do critério de estabilidade de Nyquist.

Critério de Nyquist para $G(s)K(s)$ de Fase Não-Mínima e Instável

Na Fig. 2.10a tem-se o gráfico de Nyquist para função de transferência:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s-1)}{s^2(s+2)}$$

que é uma função de transferência estável mas de fase não-mínima, pois tem um zero no semiplano direito. O que se nota claramente é que qualquer que seja o valor de K , o sistema em malha fechada será instável. De fato, tem-se que $P = 0$, $N = 1$, logo $Z = P + N = 1$.

Na Fig. 2.10b, tem-se o gráfico de Nyquist da função de transferência dada por:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s+3)}{(s+2)(s-2)}$$

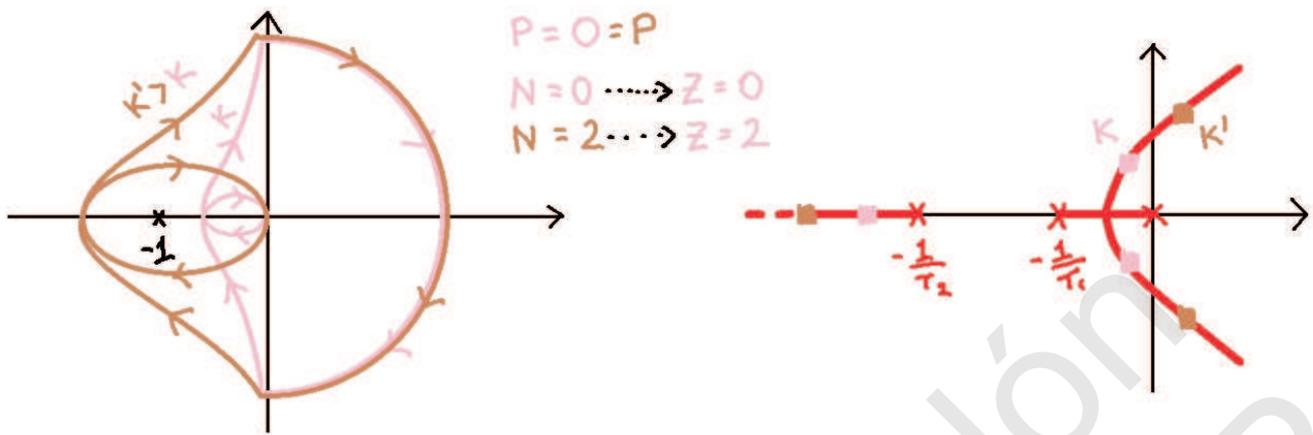


Figura 2.9: Gráfico de Nyquist para o exemplo

que é uma função de transferência instável (ou seja, o sistema é instável em malha aberta). Nota-se que um valor pequeno o suficiente de K fará com que o sistema em malha fechada seja estável. De fato, $P = 1$ e só teremos estabilidade quando $N = 0$ (na figura, tem-se que $N = -1$).

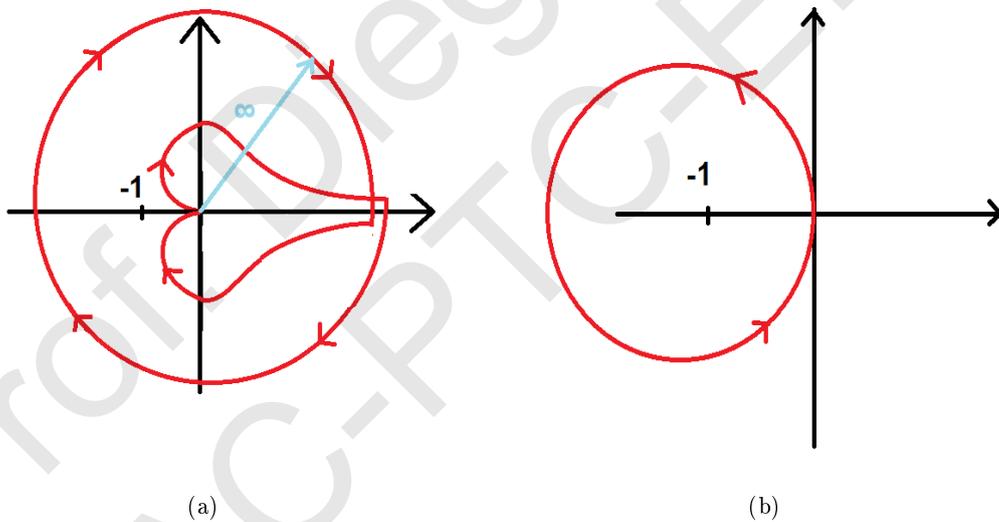


Figura 2.10: (a) Gráfico de Nyquist de Sistema de Fase Não-Mínima (b) Gráfico de Nyquist para o sistema instável.

2.5 Margens de Estabilidade

Até aqui, usamos o gráfico e o critério de estabilidade de Nyquist apenas para determinar se um sistema em malha fechada será ou não estável. Entretanto, sabemos que os parâmetros, tanto da planta quanto do controlador, podem mudar com o tempo, por diversas razões: envelhecimento dos componentes, variações dos parâmetros ambientais (temperatura, pressão,...) dentre outras. Estas variações podem transformar um sistema

em malha fechada que foi projetado para ser estável, em um sistema instável ao longo do tempo. O projetista deve então se preocupar, durante o projeto, em garantir que o sistema tenha capacidade de permanecer estável mesmo havendo estas incertezas na planta (tanto incertezas e variações nos parâmetros da planta, quanto dinâmica não-modelada). Tal propriedade de um sistema em malha fechada é conhecida como *robustez de estabilidade*. A forma clássica de se medir robustez de um sistema em malha fechada é através das chamadas *margens de estabilidade* (margem de ganho e margem de fase). Para sistemas SLIT MIMO, apesar de existir o conceito de diagrama de Nyquist multivariável, os conceitos de margens de ganho e de fase não são adequados, sendo necessário definir margens de estabilidade diferentes.

Margens de Estabilidade e Comportamento nas Frequências Médias

O gráfico de Nyquist pode ser dividido, aproximadamente, como já foi dito, no trecho de baixas frequências, trecho de médias frequências e trecho de altas frequências. Na Fig. 2.11 mostra-se como definir os parâmetros *margem de ganho*, *margem de fase* e as frequências de cruzamento de ganho e de fase a partir do diagrama de Nyquist. Estes parâmetros se encontram na região de médias frequências e dão uma boa ideia sobre a robustez do sistema, bem como o seu desempenho nominal, quando a malha for fechada.

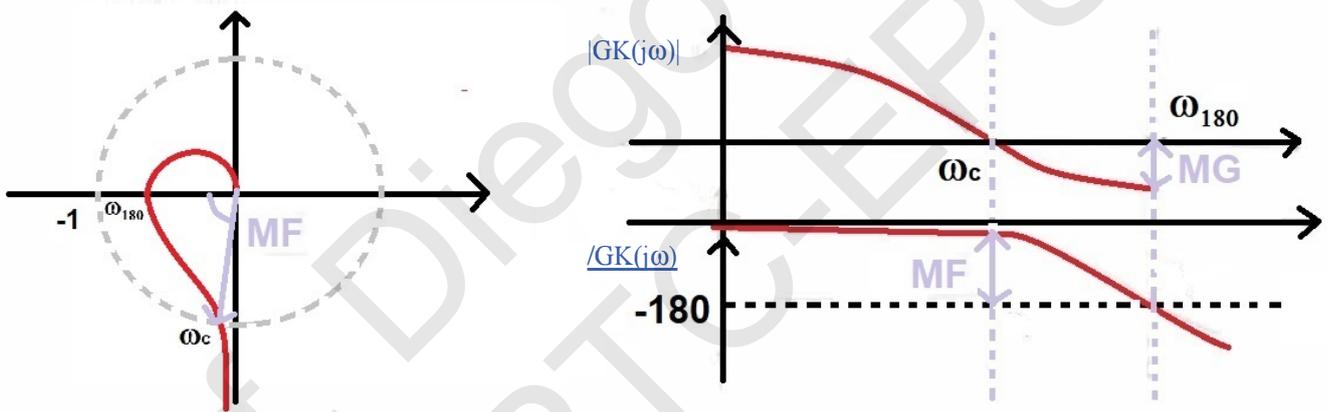


Figura 2.11: Definição de Margens de Ganho e de Fase

1. A frequência onde o módulo de $G(j\omega)K(j\omega)$ vale exatamente 1 (ou seja, 0 dB), é a chamada *frequência de cruzamento de ganho*, e é representada por ω_c .
2. A frequência onde a fase de $G(j\omega)K(j\omega)$ vale exatamente 180° é a chamada *frequência de cruzamento de fase*, e é representada por ω_{180} .
3. A *margem de ganho* MG é o valor (em decibéis) de $|G(j\omega_{180})K(j\omega_{180})|$, e indica o quanto o valor do ganho desta função de transferência poderia ser aumentado sem que isso acabasse com a estabilidade do sistema em malha fechada.
4. A *margem de fase* MF (ou γ) é dada por $\angle G(j\omega_c)K(j\omega_c) + 180^\circ$, e representa o quanto de atraso $e^{-j\alpha}$ pode ser acrescentado em $G(j\omega)K(j\omega)$ sem que isso cause instabilidade no sistema em malha fechada.

Podemos delimitar a faixa de frequências médias como sendo aquela delimitada aproximadamente por ω_c e ω_{180} , ou seja, é esta faixa de frequências que está relacionada

com a estabilidade e a estabilidade relativa (ou robustez de estabilidade) do sistema em malha fechada. Quanto mais próximo o gráfico de Nyquist estiver do ponto -1 , pior é a robustez de estabilidade do sistema em malha fechada (supondo que é estável). A correlação existente entre a posição dos pólos dominantes de malha fechada, o maior pico de ressonância do diagrama de Bode em malha fechada e o diagrama de Nyquist é mostrado na Fig. 2.12.

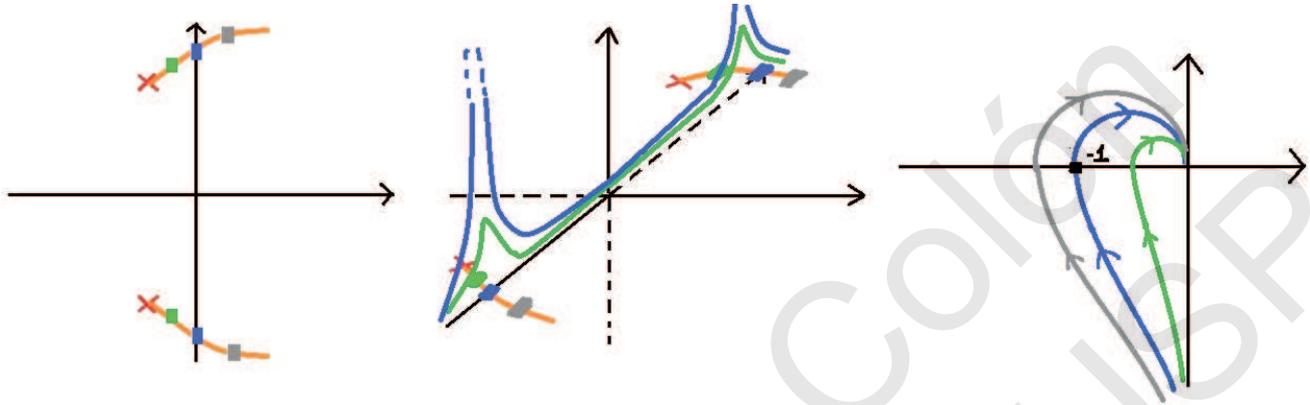


Figura 2.12: Efeito das Frequências Médias

2.6 Preparação para Controle H_∞

Nesta seção, apresentam-se novos conceitos que são utilizados no controle H_∞ .

2.6.1 Margens de Estabilidade Mais Adequadas

A menor distância entre o ponto $-1 + j0$ e o diagrama de Nyquist é resultado de um processo de minimização na frequência, ou seja:

$$ME = \min_{\omega} |-1 - L(j\omega)| = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \left(\max_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right)^{-1} = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|}$$

onde $S(j\omega)$ é a função sensibilidade (vide Fig. 2.13).

De modo geral, no caso SISO, ME é um indicador de robustez de estabilidade mais confiável, pois sintetiza as informações da margem de ganho e da margem de fase, evitando maiores confusões. Para o caso MIMO, ela continua tendo a mesma definição, enquanto MG e MF possuem generalizações complexas, como serão vistas mais adiante.

2.6.2 Sistema Nominal

Os conceitos de MG (margem de ganho), MF (margem de fase) e ME (nova margem de estabilidade) são métricas clássicas, que consideram que não tenho nenhum tipo de informação a mais sobre as incertezas da planta. Entretanto, existem uma forma melhor de fazer esta representação, que é através do conceito de *família de plantas*, que representa todas as possibilidades de modelos que uma planta pode ter durante a sua operação (mais adiante este conceito será definido matematicamente). Entretanto, já podemos definir uma planta especial dentro desta família, conhecida como *planta nominal*. Para todos os efeitos, tendo ou não informações sobre a incerteza (ou seja, conhecendo ou não a família

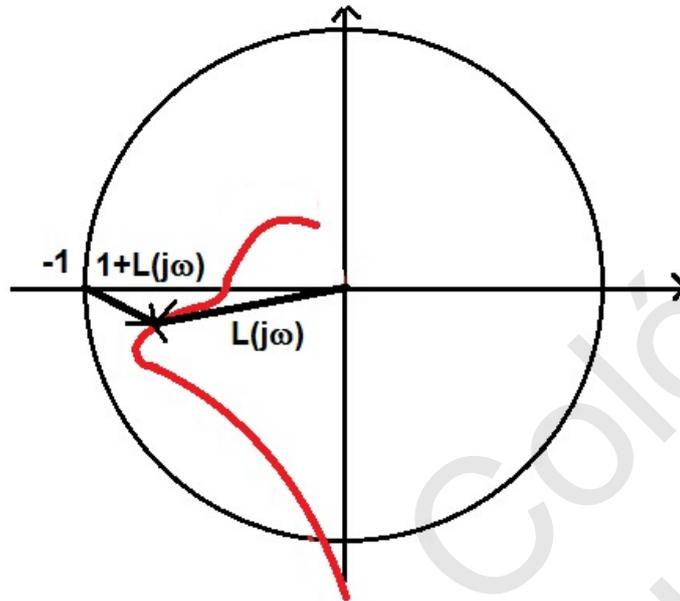


Figura 2.13: Nova definição de margem de estabilidade

de plantas) sempre trabalharemos com a planta nominal. Pode-se assumir que até agora, a função $G(s)$ do modelo da planta é o modelo nominal. Quando trabalharmos com famílias de plantas, iremos ver como encontrar a planta nominal para uma dada família.

2.6.3 Estabilidade Interna

Para se verificar estabilidade de um sistema de controle em MF, mostrou-se que pode se utilizar o chamado *critério de estabilidade de Nyquist*. O gráfico de Nyquist, entretanto, depende somente dos pólos de $L(s)$, isto é, dos chamados *modos naturais* que são *controláveis* e *observáveis* [?]. Aqueles que são não-controláveis e/ou não-observáveis simplesmente cancelam com zeros e não aparecem em $L(s)$, logo o gráfico de Nyquist independe deles. Deste modo, não está garantida a estabilidade em MF se houver algum cancelamento de pólo com zero no semiplano direito e interno a $G(s)$, a $K(s)$ ou entre $G(s)$ e $K(s)$. Diz-se que um sistema em MF é *internamente estável* se para uma representação em espaço de estados do sistema, a origem do espaço de estados é assintoticamente estável para quaisquer sinais d_u e d_y e r [SP05]. Na Fig. 2.14, para o caso de :

$$K(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}, \quad G(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

tem-se uma situação onde um pólo do controlador cancela com um zero da planta no semiplano direito. Ou seja, tem-se que:

$$L(s) = G(s)K(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)} \frac{s-1}{s+1} = \frac{k}{s}$$

Neste caso, o diagrama de Nyquist seria o diagrama de k/s , que indicaria que, para qualquer valor de $k > 0$, o sistema em malha fechada seria sempre estável. De fato, $S(s) = s/(s + k)$.

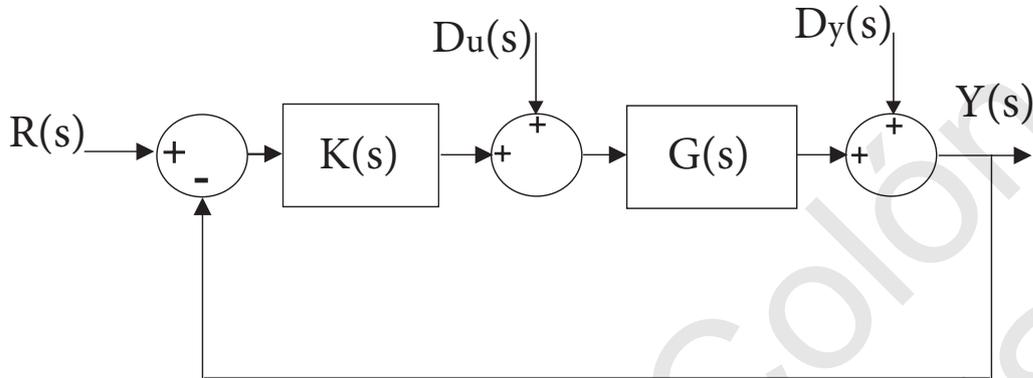


Figura 2.14: Diagrama de Blocos para Estabilidade Interna

Entretanto, pode-se mostrar que:

$$U = -KSD_y = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+k)} D_y$$

ou seja, o sinal de controle claramente diverge qualquer que seja o distúrbio d_y aplicado, o que indica que o sistema em malha fechada é instável, embora isso não possa ser observado na saída y . Ou seja, o sistema é BIBO estável, mas não é *internamente estável*.

Podemos dizer então que para que o sistema seja internamente estável, é necessário que:

1. Não haja polos internos nem a K nem a G que sejam ocultos e instáveis
2. Não haja cancelamento de pólos de K com zeros de G no semiplano direito (e vice-versa)
3. para $L = GK$, o critério de Nyquist resulte em $Z = 0$.

Teorema 2.6.1. *Suponha que G e K não tenham polos ocultos e instáveis. Então, o sistema realimentado na Fig. 2.14 é internamente instável se e só se as funções de transferência em malha fechada:*

$$(1 + GK)^{-1}, \quad K(1 + GK)^{-1}, \quad G(1 + GK)^{-1}, \quad GK(1 + GK)^{-1}$$

forem todas estáveis

Uma consequência é: se (A_c, B_c, C_c, D_c) é uma realização mínima do sistema em malha fechada, então os autovalores de A_c estão no semiplano esquerdo.

2.6.4 Família de Controladores Estabilizantes

Para o caso da Fig. 2.14, se $G(s)$ for uma planta estável, pode-se mostrar que o teorema acima será satisfeito bastando que a função $Q(s) = K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1}$ seja estável. Deste modo:

$$GQ = GK(1 + GK)^{-1} = T = 1 - S \rightarrow GQ = 1 - (1 + GK)^{-1}$$

$$1 - GQ = (1 + GK)^{-1} \rightarrow 1 + GK = (1 - GQ)^{-1}$$

$$GK = (1 - GQ)^{-1} - 1 \rightarrow K = Q(1 - GQ)^{-1}$$

Deste modo, se mantivermos Q dentro do conjunto das funções de transferências estáveis (o que garante a estabilidade em malha fechada para plantas estáveis), então todo controlador estabilizante (internamente) seria dado por $K = Q(1 - GQ)^{-1}$. Se pensarmos em $Q(s)$ como pertencente a um espaço de funções de transferência, o controlador seria então parametrizado por pontos neste espaço K_Q . Este espaço de controladores estabilizantes para um dado G pode ser representado por \mathcal{CE}_G .

Qualquer controlador dentro deste espaço estabiliza o sistema em malha fechada. Entretanto, quando impomos especificações de desempenho, estamos nos restringindo a um subconjunto menor de controladores.

Referências Bibliográficas

- [CBdR⁺14] Diego Colón, José M. Balthazar, Célia A. dos Reis, Átila M. Bueno, Ivando S. Diniz, and Suélia de S. R. F. Rosa. Control design and robustness analysis of a ball and plate system by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:226–234, 2014.
- [CCKB17] Diego Colón, Americo Cunha, Stefan Kaczmarczyk, and José M. Balthazar. On dynamic analysis and control of an elevator system using polynomial chaos and karhunen-loève approaches. *Procedia Engineering*, 199:1629 – 1634, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2017.
- [CFB⁺14] Diego Colón, Murillo A. S. Ferreira, José M. Balthazar, Átila M. Bueno, and Suélia de S. R. F. Rosa. Robustness analysis of an air heating plant and control law by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:235–244, 2014.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [SMP06] A. Smith, A. Monti, and F. Ponci. Robust controller using polynomial chaos theory. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 5, pages 2511–2517, Oct 2006.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.

- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

Prof. Diego Colón
LAC-PTC-EPUSP