

Capítulo 1

Sistemas de Controle

Neste capítulo, revisa-se o conceito de sistema em malha fechada (com realimentação e alimentação direta), bem como as suas propriedades desejadas. Apresentam-se também os diversos tipos de sinais existentes em sistemas deste tipo, bem como os diversos blocos componentes. Por fim, analisam-se aspectos do projeto dos controladores, bem como as propriedades que estes fornecem ao sistema como um todo.

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é introduzir as principais ideias e conceitos matemáticos de controle robusto H_∞ de forma didática. Diversos excelentes textos introdutórios estão disponíveis na literatura [ZD98, SP05, SPS98, DP13], mas na maioria deles, há uma preponderante preocupação com o formalismo matemático, as vezes sem muita clareza na apresentação dos conceitos. Da mesma forma, o projeto de controle robusto é feito quase que completamente por meio de programas especializados, tal como o MATLAB[®], e existem excelentes textos com este foco [GPK14]. Este capítulo então deve ser lido como coadjuvante a um destes textos, na tentativa de deixar mais claro estes conceitos.

Um sistema a ser controlado é chamado de *planta*, que possui sinais de saída e entradas. As saídas são medidas por sensores, e as entradas se dividem em duas classes: 1) entradas de controle, que temos liberdade de alterar a qualquer tempo, e 2) distúrbios, que são dados. Quando a planta é assumida linear e invariante no tempo (SLIT), pode ser representada pelo diagrama de blocos Fig. 1.1:

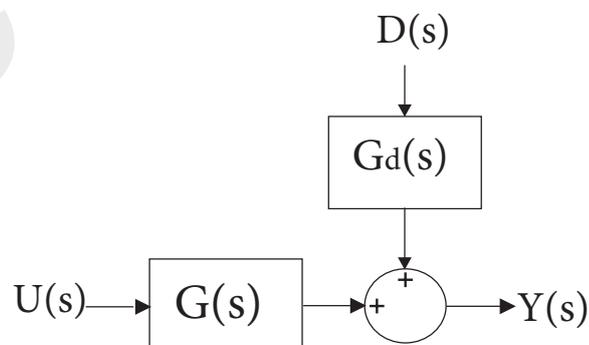


Figura 1.1: Diagrama de Blocos de uma planta com distúrbio

onde:

- $y(t)$ é a saída, ou variável controlada;
- $u(t)$ é a entrada ou variável de controle;
- $d(t)$ é o distúrbio

evidentemente, $Y(s)$, $U(s)$ e $D(s)$ são as respectivas transformadas de Laplace. $G(s)$ é a função de transferência que relaciona entrada de controle e saída, e $G_d(s)$ é o *modelo de distúrbio*, que relaciona distúrbio com saída.

No controle clássico, geralmente não fazemos projeto considerando modelo de distúrbio, ou seja, supomos que $D(s)$ e/ou $G_d(s)$ são identicamente nulos. Isso significa que somente a função de transferência $G(s)$ é considerada. O objetivo neste caso é projetar um controlador $H(s)$ de maneira que o sistema em MF, conforme apresentado na Fig. 1.2, seja estável e atenda às especificações de desempenho, normalmente dadas sobre o erro teórico de seguimento de referência $E_t(s) = R(s) - Y(s)$. O modelo da planta, levantado nos processos de *modelagem* ou *identificação de sistemas* [Lju99], é usado explicita ou implicitamente no projeto do controlador por técnicas essencialmente gráficas [Oga11, Nis15, DLCBS18]. Entretanto, para um correto funcionamento do sistema na prática, é necessário que ele tenha *robustez*, que é um conceito que normalmente não é abordado nos cursos introdutórios.

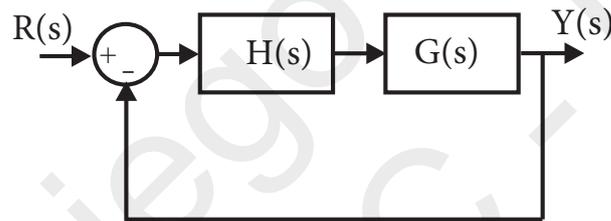


Figura 1.2: Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle

A tarefa clássica do controlador $H(s)$ é calcular, em tempo real e durante o funcionamento do sistema, um sinal de controle $U(s)$ que estabilize o sistema em MF, para qualquer que seja o seu estado inicial, além de fazer com que o sinal de saída $Y(s)$ siga "de perto" o sinal de referência $R(s)$, segundo algum critério de desempenho. A tarefa do projetista de controle é chegar a um controlador $H(s)$ que atenda estes requisitos, e para tanto, informações sobre $G(s)$ são implicitamente utilizadas durante o projeto, embutidas na técnica utilizada. Podemos dizer então que $H(s)$ utiliza a leitura dos sensores $Y(s)$ bem como informações sobre o modelo $G(s)$ que estão armazenadas nele, em certo sentido. As técnicas clássicas de projeto normalmente envolvem impôr posições aos pólos e zeros (lugar geométrico das raízes) ou formatos específicos dos diagramas de Bode da *função de transferência em malha aberta* $L(s) = G(s)H(s)$ (métodos de resposta em frequência) [Oga11, SP05].

1.2 Sistemas com Um Grau de Liberdade

Para este curso, adotamos uma visão mais geral de sistema de controle em malha fechada (MF), que pode ser representado por um diagrama de blocos como na Fig. 1.3. O modelo da planta é representado pela matriz de funções de transferência $G(s)$, o controlador é representado por $K(s)$ e $F(s)$ normalmente representa a dinâmica dos sensores. $Y(s)$

é a (transformada de Laplace) do vetor (dos sinais) de saída (ou variáveis controladas), que são medidas pelos sensores, $D(s)$ o vetor de *distúrbios*, $E(s)$ o vetor de erros, $R(s)$ o vetor de referência e $N(s)$ o vetor de ruído e erros de medida. A entrada de $G(s)$ normalmente é representada por $U(s)$ e é conhecida como *vetor de controle*. O vetor de sinais de distúrbios $D(s)$ representa todo sinal externo ao sistema (ambiental) que afeta o seu funcionamento mas que não pode ser modificado (porém é possível de ser medido). O modelo da planta $G(s)$ já inclui os modelos dos atuadores e, frequentemente, também o modelo dos sensores, sendo que neste último caso, podemos assumir $F(s) = I$ (matriz identidade). $G_d(s)$ continua sendo o modelo de distúrbios.

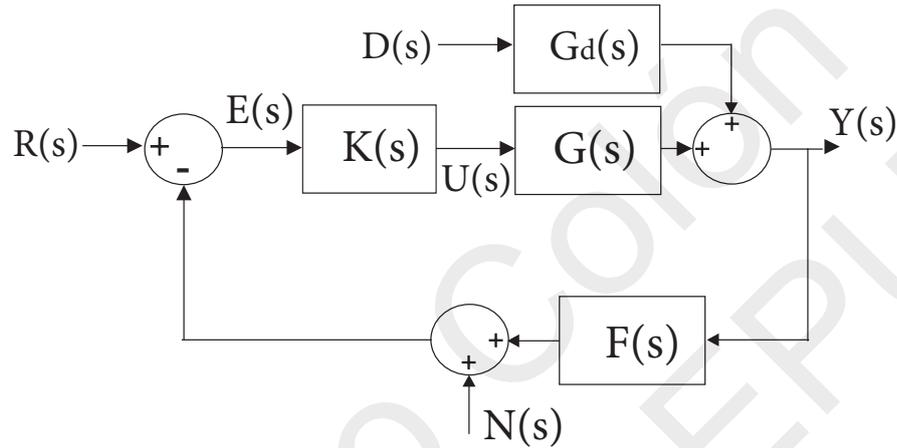


Figura 1.3: Diagrama de Blocos Normalmente Usado em Controle Robusto

As técnicas de projeto de controle robusto generalizam a ideia do projeto clássico por resposta em frequência, de modo que conceitos como diagramas de Bode e de Nyquist devem ser apropriadamente generalizados, inclusive para sistemas MIMO (daqui por diante, para facilitar a notação, poderemos omitir, nas funções de transferência, o argumento (s)). É comum, entanto, que além de técnicas robustas que usem $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ (os chamados métodos *loop-shaping*), outras funções de transferência sejam usadas, tais como S e T , que serão definidas a seguir. Considerando $F \equiv 1$, tem-se que a saída pode ser relacionada com a entrada conforme a Eq. (1.7):

$$Y = \underbrace{\frac{GK}{1+GK}}_T R + \underbrace{\frac{1}{1+GK}}_S G_d D - \underbrace{\frac{GK}{1+GK}}_T N, \quad (1.1)$$

onde S é a chamada *função sensibilidade* e T é a *função sensibilidade complementar* (também conhecida como função de transferência de MF). De fato, ambas as funções são de malha fechada (FTMF) e $S + T = 1$. Podemos ainda escrever que $S = 1/(1 + L)$ e $T = L/(1 + L)$. Outra relação importante, semelhante a esta, relaciona o *erro teórico* $E_t = Y - R$ (ou seja, o erro não afetado pelo ruído N) com as mesmas entradas, o que resulta em [?, SP05]:

$$E_t = -SR + SG_d D - TN. \quad (1.2)$$

Normalmente, o que se deseja é que este erro seja o menor possível em todas as faixas de frequência. Como R e D normalmente possuem maior amplitude nas baixas frequências, é desejável que S atenuie bastante nesta faixa, inclusive para compensar altos ganhos que G possa ter. Por outro lado, N costuma ter maior amplitude nas altas frequências, o que

torna desejável que T atenuie nesta outra faixa. Felizmente, é o que acontece por conta de $S + T = 1$. Outra importante relação é:

$$U = KS(R - G_d D - N), \quad (1.3)$$

que relaciona o sinal de controle U com os sinais de entrada. O que se nota é o papel importante de KS , que é outra FTMF. As três FTMF, ou seja, S , T e KS , são importantes para se analisar e projetar o sistema de controle.

O formato da resposta em frequência para estas três FTMF (tanto SISO, através do diagrama de Bode de módulo, quanto MIMO, através dos *valores singulares*) são usados para se especificar o desempenho que o sistema terá. Em particular, um importante parâmetro de uma FTMF é a chamada *norma* H_∞ , representada por $\|\cdot\|_\infty$, que será definida mais adiante, e que é de onde vem o nome da teoria aqui exposta.

1.2.1 Controle Ideal e Controle Real

Idealmente, o sinal controlado $y(t)$ deveria seguir perfeitamente o sinal de referência $r(t)$ sem influência do distúrbio $d(t)$ e do ruído/erro de medida $n(t)$.

Para isto acontecer, deveríamos ter $T \equiv 1$, o que equivaleria a $S \equiv 0$. Desde já, se vê que mesmo nesta situação ideal, só teríamos perfeito seguimento de referência se $N \equiv 0$, ou seja, se não houvesse erro de medida do sensor. Isto pois na situação ideal, tem-se que $y = r - n$.

Embora não se consiga $T(j\omega) \equiv 1$, é possível que $|T(j\omega)|$ seja aproximadamente um em uma determinada faixa de frequências. Nesta faixa, $|S(j\omega)|$ fica aproximadamente zero. Qual deve ser esta faixa de frequências então?

De fato, tipicamente o espectro do sinal de referência $r(t)$ se concentra nas baixas frequências na maioria das aplicações (embora, haja exceções) como pode ser visto na Fig. 1.4 em vermelho. Pela equação (1.7), o que vemos é que $|T(j\omega)|$ deveria ser um nas baixas frequências, pois assim $|T(j\omega)R(j\omega)| \simeq |R(j\omega)|$ nesta faixa. O espectro do distúrbio $|R(j\omega)|$ também se concentra tipicamente nas baixas frequências, como na curva azul da Fig. 1.4. Novamente pela equação (1.7), se vê que este é multiplicado por $|S(j\omega)|$. Felizmente, quando a função, nas baixas frequências, $|S(j\omega)| \simeq 0$ por conta da identidade $T + S = 1$, de modo que $|S(j\omega)G_d(j\omega)D(j\omega)| \simeq 0$ como pode ser visto no gráfico inferior da Fig. 1.4. Finalmente, tipicamente o ruído/erro de medida $n(t)$ tipicamente tem espectro concentrado nas altas frequências, como pode ser visto na mesma figura, em verde. Como na equação (1.7), este aparece multiplicado por T , e $|T(j\omega)| \simeq 0$ nas altas frequências, $|T(j\omega)N(j\omega)| \simeq 0$, como pode ser visto no gráfico inferior da Fig. 1.4. O espectro de $Y(s)$ será a soma vetorial/complexa da equação (1.7). Entretanto, como a amplitude das duas últimas parcelas da soma são pequenas, o resultado é que $|Y(j\omega)| \simeq |R(j\omega)|$, desde que T e S satisfaçam as propriedades assumidas na análise acima. Uma análise semelhante pode ser feita para a equação (1.2), de onde se pode concluir que $|E(j\omega)| \simeq 0$ para todas as frequências.

Como $T = GK(I + GK)^{-1}$ e $S = (I + GK)^{-1}$, e como G não pode ser alterado (já que é modelo da planta), fica evidente que para que T e S tenham estas propriedades, deve projetar um controlador $K(s)$ adequado.

1.3 Sistemas de Controle com Dois Graus de Liberdade

Na Fig. 1.5 tem-se um sistema em malha fechada com dois graus de liberdade. Tal sistema tem um número maior de controladores (dois ou mais), o que permite que especificações

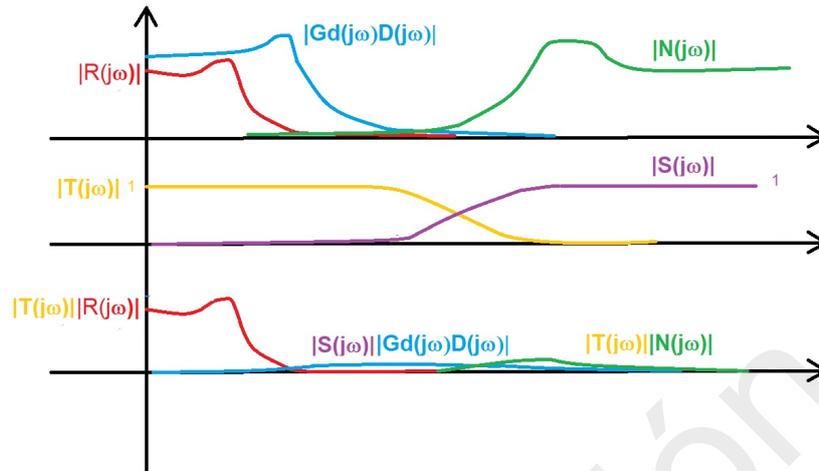


Figura 1.4: Espectros dos efeitos de referência, distúrbio e ruído

mais exigentes sejam atendidas. Além do controlador de realimentação $K(s)$, o sistema também possui dois controladores do tipo *feedforward*, ou seja, que alimentam o sinal de referência e/ou o sinal de distúrbio na entrada da planta após processamento em um controlador ($K_r(s)$ e $K_d(s)$, respectivamente), juntamente com o sinal de realimentação após ser passado pelo controlador $K(s)$.

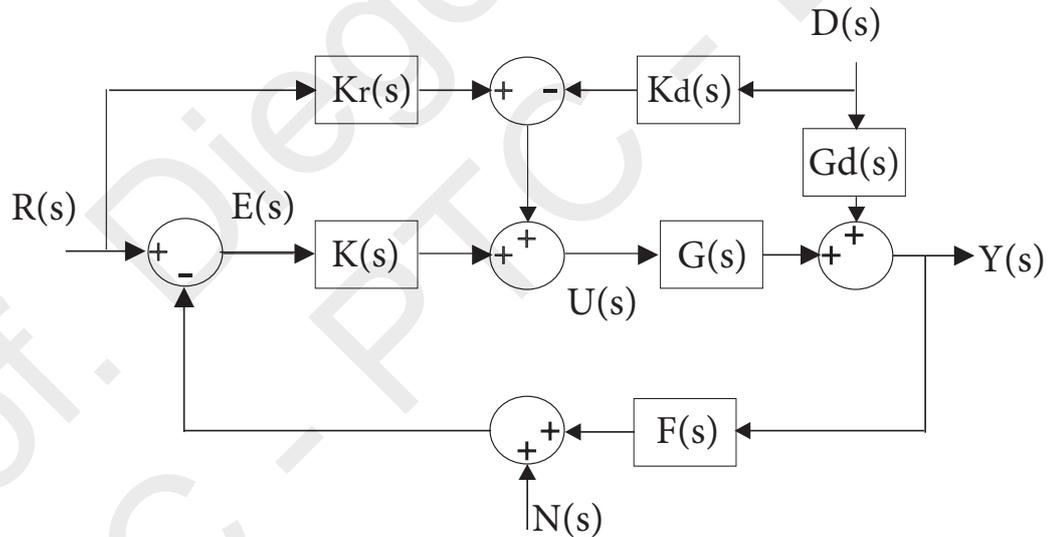


Figura 1.5: Sistema de Dois Graus de Liberdade

Por simplicidade, vamos assumir que $N(s) \equiv 0$ e que $F(s) \equiv 1$. Neste caso, tem-se que $E = R - Y$, de modo que o sinal de controle e a saída ficam:

$$U = KE + K_r R - K_d D \quad (1.4)$$

$$Y = GU + G_d D \quad (1.5)$$

Após algumas substituições, tem-se:

$$Y = GK(R - Y) + GK_r R - GK_d D + (G_d - GK_d)D \quad (1.6)$$

o que vai resultar na relação entre saída e entradas:

$$Y = \underbrace{\frac{GK}{1+GK}}_T R + \underbrace{\frac{1}{1+GK}}_S GK_r R + \underbrace{\frac{1}{1+GK}}_S (G_d - GK_d)D, \quad (1.7)$$

Podemos ver que se $G_d - GK_d \equiv 0$, poderíamos eliminar completamente o efeito do distúrbio na saída. Essa é a principal vantagem em se usar feedforward de distúrbio (juntamente com realimentação, ou *feedback*) em um sistema de controle. Entretanto, para que isso fosse feito, teríamos que definir o controlador feedforward:

$$K_d = G^{-1}G_d$$

ou seja, teríamos que ter a capacidade de montar uma função de transferência dependente da inversa de outra. Matematicamente, isso sempre é possível. Entretanto, na maioria dos casos, $G(s)$ tem mais pólos do que zeros, o que pode significar que $K_d(s)$ poderia ser não realizável nestes casos. Isto é conhecido como *inversão explícita da planta*. Outra situação complicada seria quando $G(s)$ é um sistema de estável de *fase não-mínima*, ou seja, com zeros no semi-plano direito. Neste caso, $K_d(s)$ teria que ser instável, o que não é nada recomendável. Na prática, o que se busca é que K_d aproxime $G^{-1}G_d$, sobretudo na faixa de frequências onde o distúrbio é relevante, de modo a reforçar o efeito de S nesta faixa, deixando-o ainda mais próximo de zero.

Facilmente, podemos encontrar a expressão do erro para um sistema com dois graus de liberdade, ou seja:

$$E = Y - R = TR + SGK_r R + S(G_d - GK_d)D - R$$

o que vai resultar na expressão:

$$E = S(GK_r - 1)R + S(G_d - GK_d)D$$

Esta fórmula responde uma possível pergunta do leitor, que seria sobre a utilidade da alimentação direta de R , através do controlador/filtro $K_r(s)$. Para anular o erro, idealmente poderíamos fazer que $K_r = G^{-1}$ e $K_d = G^{-1}G_d$. Em ambos os casos, teríamos que inverter explicitamente a planta, o que já vimos que é complicado as vezes. Na prática, entretanto, podemos fazer $K_d(s)$ aproximadamente igual a $G^{-1}(s)$, sobretudo na região onde se concentra o espectro de $R(s)$, o que contribuiria para $S(GK_r - 1)$ ser ainda mais próximo de zero nesta faixa, e por conta disso, o erro ser menor ainda.

1.4 O que é Robustez ?

Robustez significa, de maneira geral, *capacidade do sistema manter o seu funcionamento adequado em ambiente adverso*. No contexto de Controle Robusto, entretanto, uma definição mais precisa é necessária. Define-se então dois conceitos de robustez relacionados: *robustez de estabilidade*, que significa a capacidade do sistema manter a estabilidade mediante incertezas no modelo da planta, e *robustez de desempenho*, que significa a capacidade do sistema manter o mesmo desempenho mediante incertezas no modelo da planta. Essas incertezas podem advir de diversas fontes, tais como uma modelagem imperfeita (ou seja, há considerável incerteza no modelo da planta utilizado para o projeto),

um processo de *linearização* (onde os termos de grau maior na série de Taylor do modelo são desprezados) ou por variação no tempo (ou seja, o modelo matemático depende explicitamente do tempo). Em geral, nos cursos de controle clássico, o conceito de robustez é pouco tratado, sendo mencionado como um requisito a ser imposto nas *margens de ganho e de fase* [Oga11, Nis15, DLCBS18]

No Controle Clássico, a robustez de um sistema em malha fechada é medido tipicamente pela *margem de ganho* e pela *margem de fase*, que serão lembradas mais adiante. Entretanto, neste curso, iremos introduzir definições mais precisas de robustez, que irão depender de conceitos mais sofisticados, tais como *família de plantas*, que abarcam todas as incertezas no modelo.

Controle robusto vem se desenvolvendo ao longo das últimas décadas e atualmente já abarca uma ampla gama de classes de sistemas, desde os lineares mais simples, até os não-lineares e estocásticos. A teoria que será apresentada aqui, que está bem desenvolvida e consolidada, é a teoria de controle H_∞ (H infinito), em que se assume que o sistema a ser controlado é linear e invariante no tempo (a menos das incertezas). Há várias vantagens que podem ser citadas sobre essa teoria, se compararmos com o controle clássico. Dentre elas: 1) formalização precisa do conceito de robustez, 2) funciona tanto para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) ou com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), 3) para quem já conhece controle clássico, muitos conceitos são estendidos naturalmente.

Uma desvantagem da teoria H_∞ é que sua extensão para sistemas não-lineares, da forma como está hoje, é difícil de ser utilizada. Uma técnica de análise de robustez que funciona também para sistemas não-lineares e vem ganhando notoriedade nos últimos anos é a do *polynomial chaos*, que apesar de ser de natureza estocástica, pode ser implementada computacionalmente.

Referências Bibliográficas

- [CBdR⁺14] Diego Colón, José M. Balthazar, Célia A. dos Reis, Átila M. Bueno, Ivando S. Diniz, and Suélia de S. R. F. Rosa. Control design and robustness analysis of a ball and plate system by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:226–234, 2014.
- [CCKB17] Diego Colón, Americo Cunha, Stefan Kaczmarczyk, and José M. Balthazar. On dynamic analysis and control of an elevator system using polynomial chaos and karhunen-loève approaches. *Procedia Engineering*, 199:1629 – 1634, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN 2017.
- [CFB⁺14] Diego Colón, Murillo A. S. Ferreira, José M. Balthazar, Átila M. Bueno, and Suélia de S. R. F. Rosa. Robustness analysis of an air heating plant and control law by using polynomial chaos. *AIP Conference Proceedings*, 1637:235–244, 2014.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [SMP06] A. Smith, A. Monti, and F. Ponci. Robust controller using polynomial chaos theory. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 5, pages 2511–2517, Oct 2006.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.

- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

Prof. Diego Colón
LAC - PTC - EPU SP