Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Produção

Modelagem matemática de sistemas dinâmicos

Profs. Drs. Mauro Spinola e Marcelo Pessôa
mauro.spinola@usp.br / mpessoa@usp.br

1

As perguntas de hoje

- Como modelar matematicamente os sistemas de controle automático?

2

Esta aula

- Alguns conceitos
- Função de transferência
- Modelagem de sistemas de controle automático
- Exemplos e exercícios

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 3
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

3

Alguns conceitos

- Sistemas lineares
  - São sistemas para os quais se aplica o princípio da superposição
  - **Princípio da superposição**: a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas funções diversas é a soma das respostas individuais.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 4
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

4

Alguns conceitos

- **Equação diferencial linear**
  - Os coeficientes são constantes ou somente funções da variável independente.

- **Equação diferencial linear invariante no tempo**
  - É uma equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y =$$
$$= b_o x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_{m-1} x^{(1)} + b_m x$$

$$n > m$$
$$a_i, b_i \longrightarrow consts$$

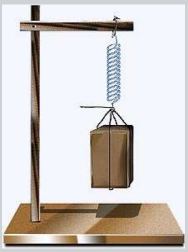
set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 5

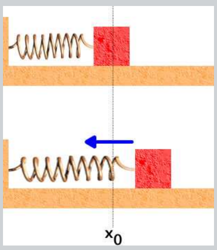
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

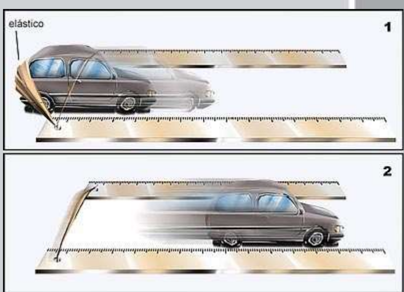
5

Alguns conceitos

- **Sistemas lineares invariantes no tempo**
  (ou sistemas lineares de coeficientes constantes)
  - Podem ser descritos por **equações lineares invariantes no tempo**.







set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 6

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

6

Alguns conceitos

PRO
USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

- **Sistemas lineares variantes no tempo**
  - Representados por equações lineares cujos coeficientes são funções de tempo.
  - Ex. Sistema de controle de veículo espacial

  (a massa varia devido ao consumo de combustível).

set-20

Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

7

7

Estabilidade dos sistemas de automação

PRO
USP UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

- **O que é estabilidade de um sistema dinâmico?**
  - Um sistema de controle está em **equilíbrio** se, na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado.
  - Um sistema de controle linear e invariante no tempo é **estável** se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial.

set-20

Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

8

8

Estabilidade dos sistemas de automação

- O que é estabilidade de um sistema dinâmico?
  - Um sistema de controle linear e invariante é **criticamente estável** se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua.
  - Um sistema de controle linear e invariante é **instável** se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 9

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

9

Estabilidade dos sistemas de automação

- O que é estabilidade de um sistema dinâmico?
  - Sistemas reais apresentam limitações no crescimento das amplitudes: limitações ou quebra. Quando há proteção, desligam.

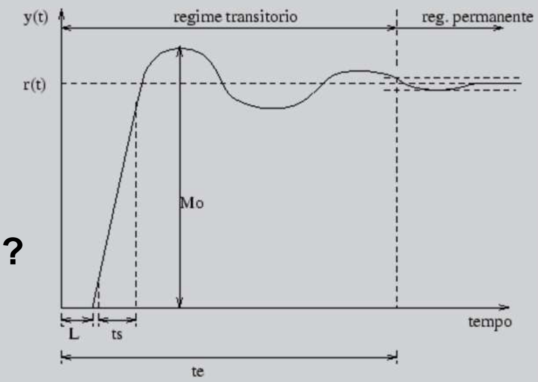
set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 10

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

10

Definições de regime transitório e permanente

- O que é regime transitório?
- O que é regime permanente?



set-20

Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

11

11

Definições de regime transitório e permanente

- O que é regime transitório?
  - O regime transitório ocorre quando um sistema é sujeito a uma condição inicial ou quando há uma perturbação no funcionamento de regime permanente.

set-20

Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

12

12

Definições de regime transitório e permanente

❑ **O que é regime permanente?**

- O regime permanente é aquele no qual o sistema de controle está em operação com valores dinâmicos constantes ou cíclicos
  - Por exemplo: um navio ou um avião viajando em linha reta na velocidade cruzeiro
- Um caso particular de regime permanente é o repouso quando todos os parâmetros estiverem sem variação no tempo, sem energia.

Função de transferência

❑ **Transformando uma equação diferencial**

$$a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} \Rightarrow a_i s^i Y(s)$$

$$a_i D^i y(t)$$

Função de transferência

- Transformando uma equação diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d\ \ y}{dt} + a_0 y =$$
$$b_n \frac{d^m x}{dt^m} + b_{n-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{d\ \ x}{dt} + b_0 x$$
$$n > m$$

$$a_i, b_i \longrightarrow consts$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 15

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

15

Função de transferência

- Transformando uma equação diferencial

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \ldots + a_1 s\ \ Y(s) + a_0 Y(s)$$
$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1}s^{m-1}X(s) + \ldots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) =$$
$$X(s)(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0)$$

G(s) = $\frac{Y(s)}{X(s)}$

Y(s) = G(s)*X(s)

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 16

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

16

Função de transferência

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$G(s) = \frac{\mathrm{L}\,[\text{saída}]}{\mathrm{L}\,[\text{entrada}]}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

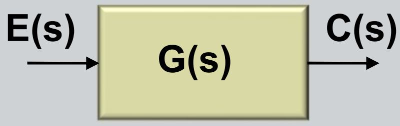
Y(s) = G(s)*X(s)

Função de transferência

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

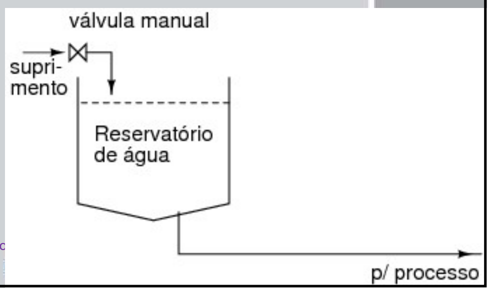
- **Onde quero chegar?**
- Se eu conheço a função de transferência G(s), sei como o sistema se comporta.
- Ao aplicar ao sistema uma entrada X(s)...
- ...consigo calcular a saída Y(s)=X(s).G(s)
- Se desejar, posso depois obter a resposta no tempo usando a antitransformada Y(s) → y(t)

Função de transferência de sistema de malha aberta

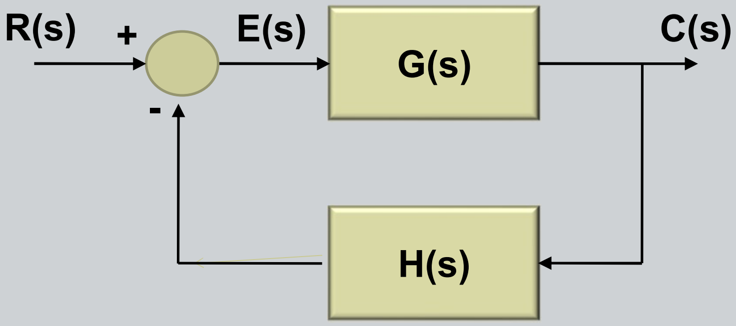


$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$$

$$C(s) = G(s)E(s)$$

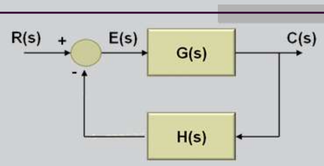


Função de transferência de sistema de malha fechada



Função de transferência de sistema de malha fechada

- Exemplo



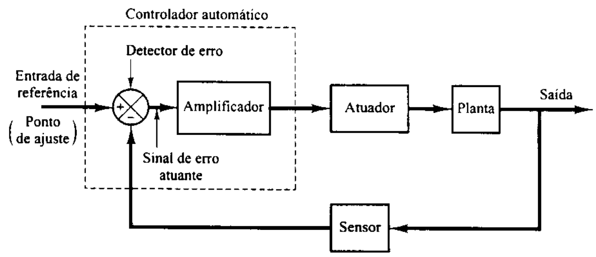


Figura 3.7 Diagrama de blocos de um sistema de controle industrial, que consiste em um controlador automático, um atuador, uma planta e um sensor (elemento de medição).

21

Função de transferência de sistema de malha fechada

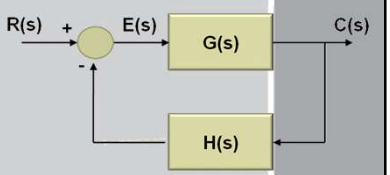
$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

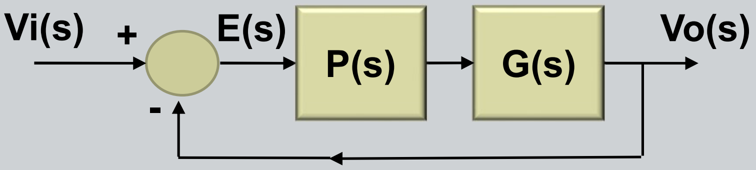
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$



22

Função de transferência de sistema de malha fechada



$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)}$$

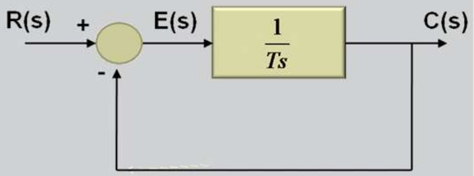
$$V_o(s) = \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} V_i(s)$$

23

Sistemas de primeira ordem

- São sistemas representados por equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$

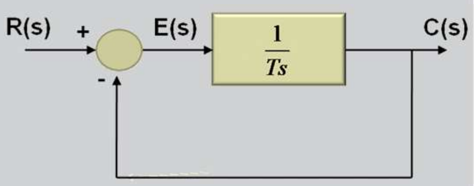


24

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau unitário
- Basta multiplicar por R(s) = 1/s

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts}$$



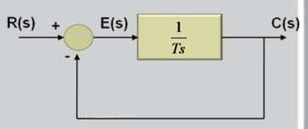
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{1+Ts}\cdot\frac{1}{s}$$

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau
- Expansão em frações parciais

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

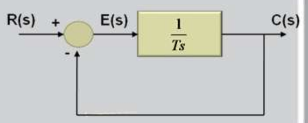


- Qual a resposta no tempo?

Sistemas de primeira ordem

- Qual a resposta ao degrau no tempo?

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$



$$c(t)=1-e^{-t/T}$$

$$t>0$$

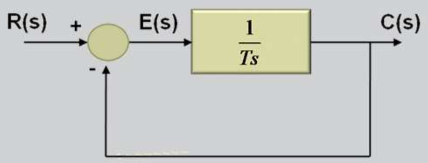
set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 27

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

27

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau no Wolfram
- Adotar T = 5 ms (constante de tempo)
- http://www.wolframalpha.com
  - inverse laplace transform (1/s)-1/(s+(1/0.005))



set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 28

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

28

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a degrau no Wolfram
- Adotar T = 5 ms (constante de tempo)
- http://www.wolframalpha.com

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{0.005}}\right](t)$$

Result:

$$1 - e^{-200\,t}$$

$$e^{-200.\,t}\left(e^{200.\,t} - 1.\right)$$

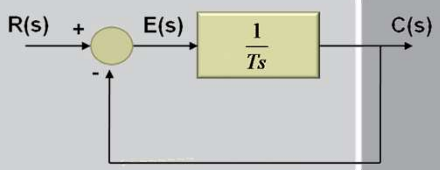


Gráfico ?

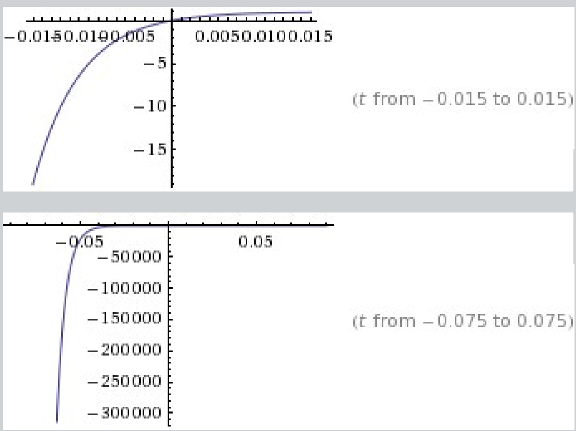
set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 29

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

29

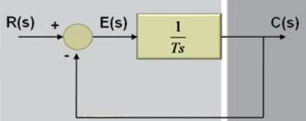
Sistemas de primeira ordem

- Resposta ao degrau (Wolfram)



(t from −0.015 to 0.015)

(t from −0.075 to 0.075)



set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 30

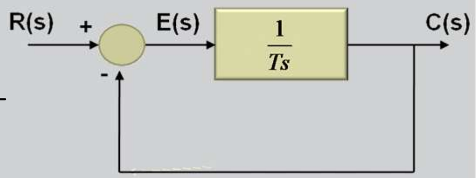
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

30

Sistemas de primeira ordem

- ❑ **Resposta a rampa**
- ❑ **Basta multiplicar por R(s) = 1/s²**

$$C(s) = \frac{1}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s^2}$$



- ❑ **calcular a resposta no tempo**

$0.005\,(200\,t + e^{-200\,t} - 1)$

Sistemas de primeira ordem

- ❑ **Resposta a rampa no Wolfram**
  - Inverse Laplace transform 1/((1+0.005s)s^2)

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{(1+0.005\,s)\,s^2}\right](t)$$

Result:

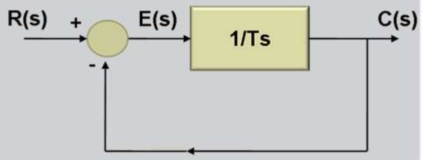
$$t + 0.005\,e^{-200\,t} - 0.005$$

Gráfico ?

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a impulso
- Basta multiplicar por R(s) = 1
  - Inverse Laplace transform 1/(1+s/200)

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}$$



- calcular a resposta no tempo

33

Sistemas de primeira ordem

- Resposta a impulso no Wolfram

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{1+\frac{s}{200}}\right](t)$$

Result:

$$200\, e^{-200\, t}$$

34

Sistemas de segunda ordem

- Servossistema para controle de posição da saída de um motor com torque T com um elemento de carga com momento de inércia J e viscosidade B
- T = J c''(t) + B c'(t)
- Fazendo a transformada de Laplace:

Sistemas de segunda ordem

- T = J c''(t) + B c'(t)
- $T(s) = J\, s^2\, C(s) + B\, s\, C(s)$
- $$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

Sistemas de segunda ordem

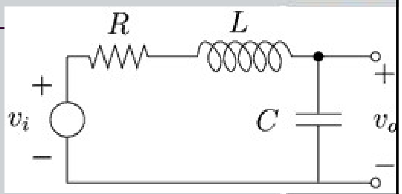
- Ao fechar a malha = J c''(t) + B c'(t)
- $$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 37

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

37

Sistemas elétricos e eletrônicos



$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v_i$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)dt = v_o$$

$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 38

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

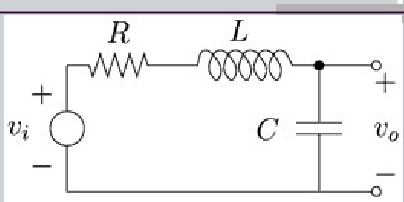
38

Abordagem das impedâncias

$$Z_R = R = \frac{V_R(s)}{I(s)}$$

$$Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{V_C(s)}{I(s)}$$

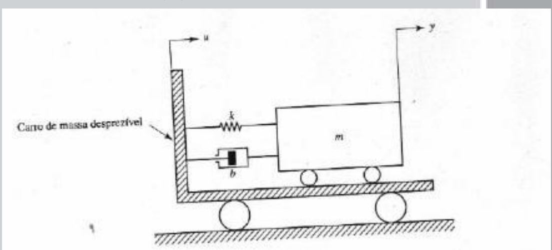
$$Z_L = sL = \frac{V_L(s)}{I(s)}$$



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + sL + R}$$

Sistemas mecânicos

- Sistema massa-mola-amortecimento
  - Esse sistema pode ser modelado aplicando-se as equações da física referentes à força na massa, na mola e no amortecedor
  - Após obtida a equação diferencial, aplica-se a transformada de Laplace é é obtida a função de transferência da relação entre o deslocamento da saída Y(s) e o deslocamento da entrada U(s)



Sistemas mecânicos

- Sistema massa-mola-amortecimento

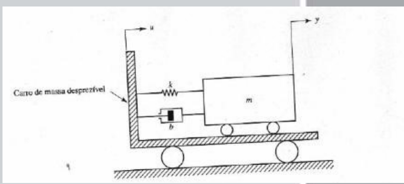
$$ma = \sum F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}) - k(y-u)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs+k)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} = \frac{\frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$



41

Sistemas mecânicos

- Sistema massa-mola-amortecimento
- No caso anterior, trabalhou-se no domínio do tempo e depois da equação diferencial montada é que foi feita a passagem para o Plano s (domínio das frequências)
- Outra forma de fazer a mesma coisa é trabalhar somente no Plano s

42

Sistemas mecânicos

- As equações da física da massa, da mola e do amortecedor podem ser escritas já no Plano s, ou seja as respectivas transformadas de Laplace:

$$massa: F(s) = m.s^2.X(s)$$
$$mola: F_1(s) = k.X(s)$$
$$amortecedor: F_2(s) = b.s.X(s)$$

- Onde F(s) é a força aplicada e X(s) é o deslocamento

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 43
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

43

Sistemas mecânicos

- As forças que são aplicadas na massa se somam:

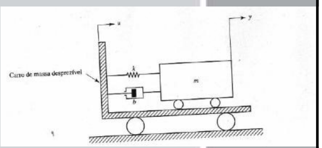
$$F(s) = -F_1(s) - F_2(s)$$

- A equação fica:

$$m.s^2.Y(s) = -k.[Y(s) - U(s)] - k.s.[Y(s) - U(s)]$$

- Retirando-se da expressão a relação ente Y(s) e U(s), fica a mesma expressão anterior

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{b}{k}s + 1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$



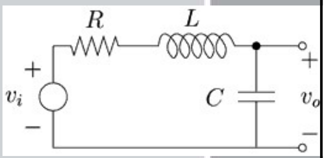
set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 44
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

44

Equivalência dos sistemas

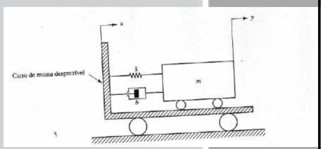
- Circuito elétrico RLC

$$G(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{sRC+1}{s^2LC+sRC+1}$$



- Sistema massa-mola

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{bs+k}{ms^2+bs+k}=\frac{\frac{b}{k}s+1}{\frac{m}{k}s^2+\frac{b}{k}s+1}$$



set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 45

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

45

Equivalência dos sistemas

- Os sistemas são equivalentes

$$RC\approx\frac{b}{k}$$

$$LC\approx\frac{m}{k}$$

$$R\approx b$$

$$L\approx m$$

$$C\approx\frac{1}{k}$$

$$G(s)=\frac{sRC+1}{s^2LC+sRC+1}$$

$$G(s)=\frac{\frac{b}{k}s+1}{\frac{m}{k}s^2+\frac{b}{k}s+1}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 46

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

46

Utilização do Wolfram

- **Wolfram Alpha**
- Utilizar o o Wolfram para resolver as equações e estudar o comportamento dos sistemas
- Circuito RLC com:
  - R=2Ω
  - C=10μF
  - L=1mH

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 47

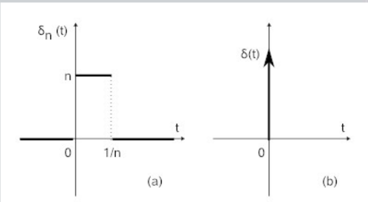
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

47

Função de transferência

a) Resposta ao impulso unitário

- Caso particular



$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- g(t) é chamada de resposta impulsiva ou função característica do sistema

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 48

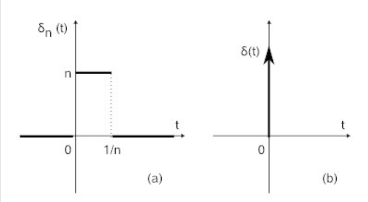
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

48

Função de transferência

a) Resposta ao impulso unitário

- Circuito RLC



$$x(t) = \delta(t)$$
$$X(s) = 1$$
$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$
$$Y(s) = \frac{sRC+1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{20.10^{-6}s+1}{10^{-8}s^2 + 20.10^{-6}s + 1}$$

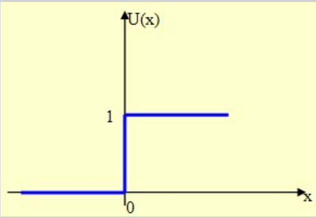
- Fazer no WolframAlpha!

49

Função de transferência

b) Resposta ao degrau unitário

- Circuito RLC



$$x(t) = 1(t)$$
$$X(s) = \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$
$$Y(s) = \frac{sRC+1}{s(s^2LC + sRC + 1)} = \frac{20.10^{-6}s+1}{s(10^{-8}s^2 + 20.10^{-6}s + 1)}$$

- Fazer no WolframAlpha!

50

Função de transferência

b) Resposta a entrada senoidal

- Circuito RLC

$$x(t) = sen(wt)$$

$$X(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

- Utilizar ω=3.000 rd/s
- Aumentar a frequência angular para ω=45.000 rd/s
- Aumentar mais ainda para ω=200.000 rd/s

$$Y(s) = \frac{sRC + 1}{(s^2 + w^2)(s^2LC + sRC + 1)} = \frac{20.10^{-6}s + 1}{(s^2 + 9.10^6)(10^{-8}s^2 + 20.10^{-6}s + 1)}$$

- Fazer no WolframAlpha!

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 51

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

51

Controlador proporcional P

- A função de transferência é:

$$P(s) = K_p E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- em outras palavras, com que intensidade vai ser corrigido o erro

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 52

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

52

Controlador PI proporcional integrativo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + \frac{K_i}{s})E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_i é a constante de integração

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 53

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

53

Controlador PD proporcional derivativo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + K_d s)E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_d é a constante de derivação

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 54

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

54

Controlador PID completo

- A função de transferência é:

$$P(s) = (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)E(s)$$

- Onde E(s) é a transformada de Laplace do erro
- K_p é a constante proporcional
- K_i é a constante de integração
- K_d é a constante de derivação

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 55

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

55

Controladores PID

- Controladores PID são os mais populares no mercado
- Contêm 3 componentes que se somam:
  - Uma proporcional ao erro
  - Uma proporcional à integral do erro
  - Uma proporcional à derivada do erro

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 56

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

56

Controladores PID

- Usando os mesmos valores do exercício do RLC fazer a realimentação e verificar comportamento na resposta a degrau
- A resposta a degrau de malha aberta apresenta *overshoot* de 80% e 3,5ms de oscilação
- Esse comportamento foi visto no outro exercício
- Com a realimentação o objetivo é minimizar esse comportamento indesejado

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 57

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

57

Controladores PID

- Fazer K_p=1 e fechar a malha
- Observar *overshoot*
- Observar a oscilação se diminuiu
- Observar o erro de regime permanente

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 58

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

58

Controladores PID

- Fazer K_p=20 e fechar a malha
- Observar *overshoot*
- Observar a oscilação se diminuiu
- Observar o erro de regime permanente

- Observar que o efeito da realimentação proporcional foi reduzir o erro de regime permanente e forçar para eliminar a oscilação indesejada do sistema

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 59
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

59

Sintonia de controladores PID

- **[Quadro 3.3] Sintonia de controladores PID: cálculo dos parâmetros de controle segundo o método de Ziegler-Nichols baseado no ganho crítico K_{cr} e no período crítico T_{cr}.**

Tipo de controle	K_p	T_i	T_d
P	K_{cr} / 2	∞	0
PI	K_{cr} / 2,2	T_{cr} / 1,2	0
PID	K_{cr} / 1,7	T_{cr} / 2	T_{cr} / 8

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessoa - Modelagem 60
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

60

Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Produção

Modelagem matemática de sistemas dinâmicos

Profs. Drs. Mauro Spinola e Marcelo Pessôa
mauro.spinola@usp.br / mpessoa@usp.br