PNV 3421 - Processos Estocásticos

Notas de Aula - Teoria de Filas 03/09/2020

1 - Revisão da Aula de 27/08/2020

1.1 Definição de variável aleatória sem memória

Uma variável aleatória não negativa X não tem memória se, para quaisquer $s, t \geq 0$,

$$P[X > s + t / X > s] = P[X > t] \quad (1)$$

ou

$$P[X > s + t] = P[X > s] \, P[X > t] \quad (2)$$

ou ainda

$$\bar{F}_X(s + t) = \bar{F}_X(s) \cdot \bar{F}_X(t) \quad (2')$$

1.2 Interpretação

Contexto 1 X é a vida útil de um equipamento

A vida útil de um equipamento, X, e a vida residual, após um intervalo de tempo de funcionamento de amplitude s,

$s > 0$, qualquer, Y têm a mesma distribuição de probabilidade.

<u>Contexto 2</u> X representa o intervalo entre chegadas consecutivas de navios a um porto.

Você presenciou a chegada de um navio ao porto, aguardou durante 3 horas a próxima chegada, sem que ela ocorresse. Se X é uma variável aleatória sem memória, a probabilidade de você ter de esperar mais de duas horas adicionais para a próxima chegada é igual à probabilidade de ter de esperar mais de duas horas após o instante da chegada que você presenciou.

1.3 Exemplos de Variável aleatória sem memória

Propriedade 1
A variável aleatória exponencial não tem memória.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x}$$

$$\bar{F}_X(s+t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t} = \bar{F}_X(s) \cdot \bar{F}_X(t)$$

Propriedade 2
A variável aleatória exponencial é a única variável contínua que não tem memória.

Propriedade 3

A variável aleatória geométrica não tem memória.

$$P[N=n] = p(1-p)^{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\bar{F}_N(n) = (1-p)^n$$

$$\bar{F}_N(s+t) = (1-p)^{(s+t)} = (1-p)^s(1-p)^t =$$

$$= \bar{F}^N(s) \cdot \bar{F}_N(t) \qquad s, t \geq 0, \text{ inteiros}$$

1.4 Aprendendo a trabalhar com duas variáveis aleatórias em um mesmo problema

Caso 1

$$X - f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

$$Y - f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} \quad , y \geq 0$$

Calcular $P[X>Y]$

$$P[X>Y] = \int_0^\infty P[X>Y/Y=t]\, f_Y(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Caso 2

Uma peça é encaminhada à máquina para um dado serviço. O tempo de atendimento é uma variável aleatória exponencial com média $1/\lambda$; à saída da máquina, há um controle de qualidade, a probabilidade de aprovação é p, independentemente do número de vezes que a peça passa pela máquina. Em caso de reprovação, a peça volta à máquina. Considerem duas variáveis aleatórias: TTM, tempo total da peça na máquina e N, número de passagens pela máquina. Deseja-se calcular o tempo total médio na máquina, $E[TTM]$.

Calcula-se, inicialmente, $E[TTM/N=n]$, isto é, o tempo total médio na máquina dado que a peça passou n vezes pela máquina.

$$E[TTM/N=n] = \sum_{k=1}^{n} 1/\lambda = n/\lambda$$

A seguir, elimina-se a condicionalidade com relação à variável N:

$$E[TTM] = \sum_{n=1}^{\infty} E[TTM/N=n] \cdot P[N=n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lambda} \times p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$$

Chamando $(1-p)$ de q, o passo seguinte é determinar para onde converge a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$$

Interpretando $n q^{n-1}$ como $\frac{d(q^n)}{dq}$ e intercambiando a operação de derivação com a série (que nem sempre é válida, mas neste caso é), obtém-se

$$E[TTM] = \frac{p}{\lambda} \frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right) =$$

$$\frac{p}{\lambda} \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{p}{\lambda} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{\lambda p}$$

1.5 Questões deixadas para resolução

1- Cálculo da média e da variância da variável aleatória exponencial

Variável aleatória exponencial X, com função densidade de probabilidade $f_X(x)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

a) Média

$$E(X) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$$

b) Variância

$$\sigma_X^2 = \int_0^\infty (x - E(X))^2 f_X(x) dx = 1/\lambda^2$$

2 _ Cálculo da média da variável aleatória geométrica, N, com distribuição de probabilidade $P[N = n] = p(1-p)^{n-1}$

Média $$E(N) = \sum_{n=1}^\infty n \cdot P[N=n] =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty n p (1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^\infty n q^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{p}.$$

2 - Processos Estocásticos

2.1 Definição

Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é uma família de variáveis aleatórias. Para cada valor de t pertencente ao conjunto índice T (conjunto dos índices), $X(t)$ é uma variável aleatória. Como em muitos casos o conjunto T representa tempo, é usual mencionar que $X(t)$ é o estado do processo no instante t.

2.2 Classificação dos processos estocásticos, de acordo com o conjunto T.

Caso o conjunto T seja um segmento dos números reais, diz-se que $\{X(t), t \in T\}$ é um processo estocástico em tempo contínuo. Se T é um conjunto enumerável (finito ou não), diz-se que $\{X(t), t \in T\}$ é um processo estocástico em tempo discreto.

É importante distinguir o conjunto índice T do conjunto de valores que a variável aleatória $X(t)$ pode assumir, que é chamado de espaço de estados. A seguir, são apresentados exemplos de processos estocásticos impor tantes no estudo de filas

1- $\{N(t), t \geq 0\}$ número de clientes no sistema no instante t, conta os que são atendidos e aqueles que estão na fila de espera.

2- $\{Nq(t), t \geq 0\}$ número de clientes na fila no instante t; índice q de queue (fila em inglês).

3- $\{A(t), t \geq 0\}$ número de chegadas de clientes até o instante t.

4- $\{D(t), t \geq 0\}$ número de saídas de clientes (fim de atendimento) até o instante t.

5- $\{W_n, n = 1, 2, \cdots\}$ tempo de permanência do cliente n no sistema; é a soma do tempo de espera com o tempo de atendimento.

6- $\{Wq_n, n = 1, 2, \ldots\}$ tempo de espera em fila do cliente n.

Os quatro primeiros exemplos são processos estocásticos em tempo contínuo e os dois últimos processos estocásticos em tempo discreto. Por sua vez, o espaço de estados dos 4 primeiros processos é o dos inteiros não negativos e dos dois últimos é um subconjunto dos reais.

2.3 Processos estocásticos com incrementos independentes – definição

Diz-se que um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t), t \in T\}$ tem incrementos independentes se, para quaisquer valores de $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \in T$, as variáveis aleatórias $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ são mutuamente independentes. Considere-se a Figura 1; $X(t_1) - X(t_0)$ representa o incremento do processo no intervalo $(t_0, t_1]$, $X(t_2) - X(t_1)$ o incremento no intervalo $(t_1, t_2]$, .., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ o incremento no intervalo (t_{n-1}, t_n). Se o processo tem incrementos independentes, a mudança de estado do processo num intervalo não afeta a mudança de estado nos outros intervalos. Assim, o conceito de falta de memória aparece aqui de uma outra forma.

2.4 Processos estocásticos com incrementos independentes e estacionários – definição

Seja $\{X(t), t \in T\}$ um processo estocástico com incrementos independentes. Se, para quaisquer $t_1 < t_2 \in T$ e $t_1 + s, t_2 + s \in T$, as

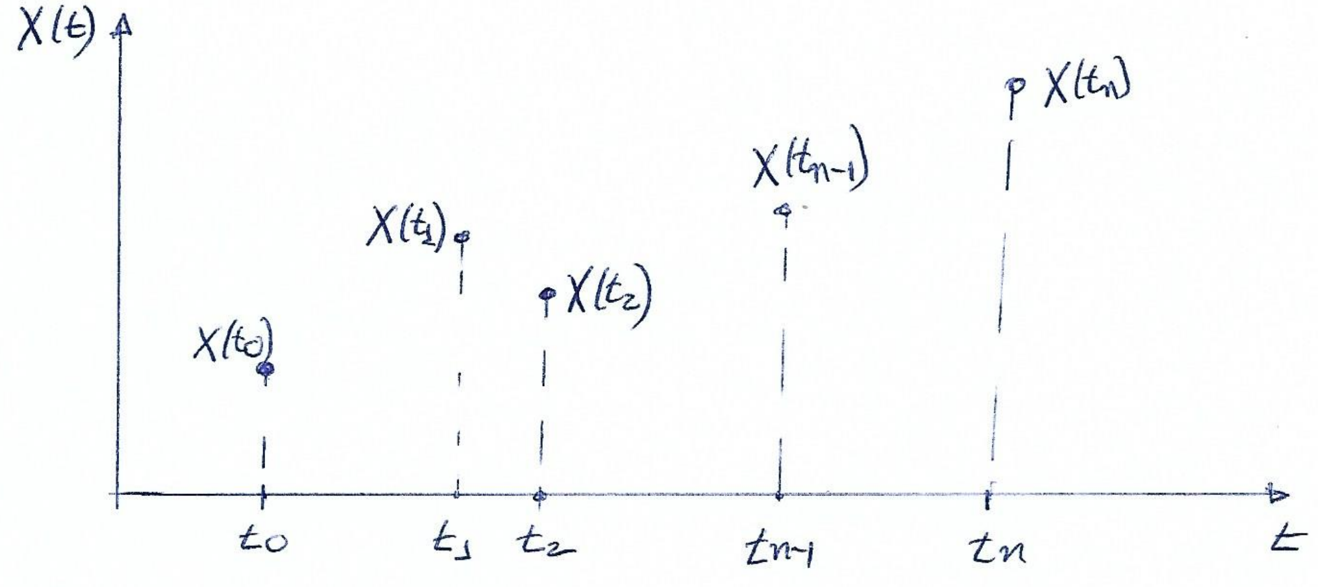

Figura 1 Incrementos $X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1)\ldots$
$X(t_n)-X(t_{n-1})$

variáveis $X(t_2)-X(t_1)$ e $X(t_2+s)-X(t_1+s)$ têm a mesma distribuição de probabilidade, diz-se que o processo estocástico $\{X(t), t\in T\}$ tem incrementos independentes e estacionários. A interpretação é que a variação probabilística do estado do processo depende apenas da amplitude do intervalo, mas não da posição do intervalo. A Figura 2 ilustra a definição.

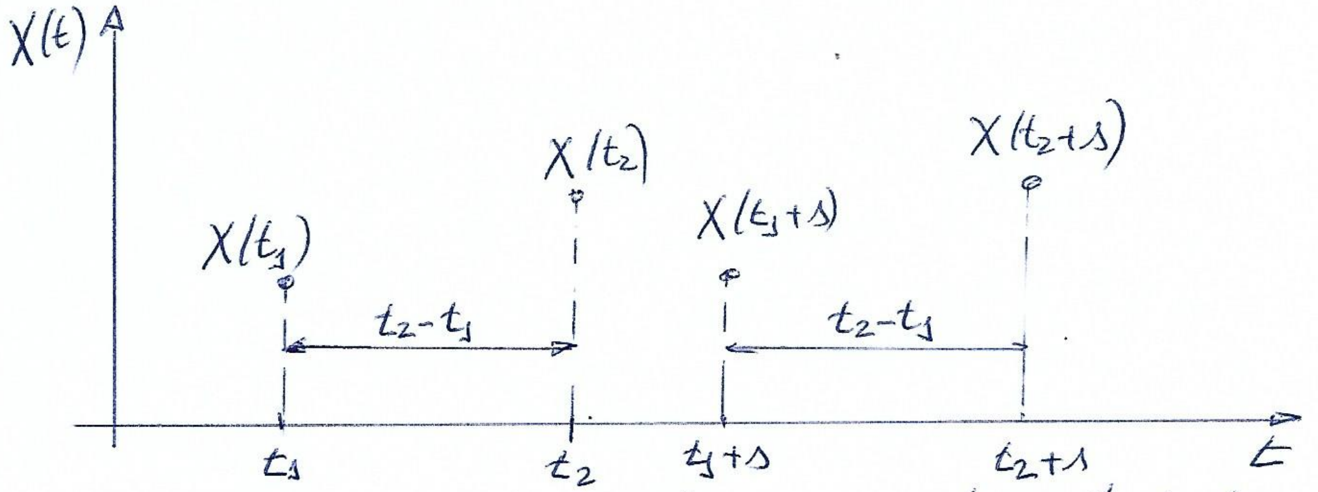

Figura 2 Ilustração de incrementos estacionários

2.5 Processos Markovianos – definição

Diz-se que um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é um processo Markoviano (processo de Markov) se, para quaisquer $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n < t \in T$,

$$P[X(t) \leq x / X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n]$$

$$= P[X(t) \leq x / X(t_n) = x_n] \qquad (1)$$

Considere-se a Figura 3; para interpretar a definição acima, x_0, x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ são estados passados do processo e x_n é o estado presente. A probabilidade de um estado futuro, dados os estados passados e o estado presente não depende dos estados passados. É possível prever o comportamento probabilístico do processo, conhecendo-se apenas o estado presente, dispensando-se as informações referentes aos estados em que o processo esteve em instantes do passado. Mais uma vez o conceito de falta de memória vem à tona. A propósito será que você consegue mostrar que todo processo estocástico com incrementos independentes é um processo Markoviano?

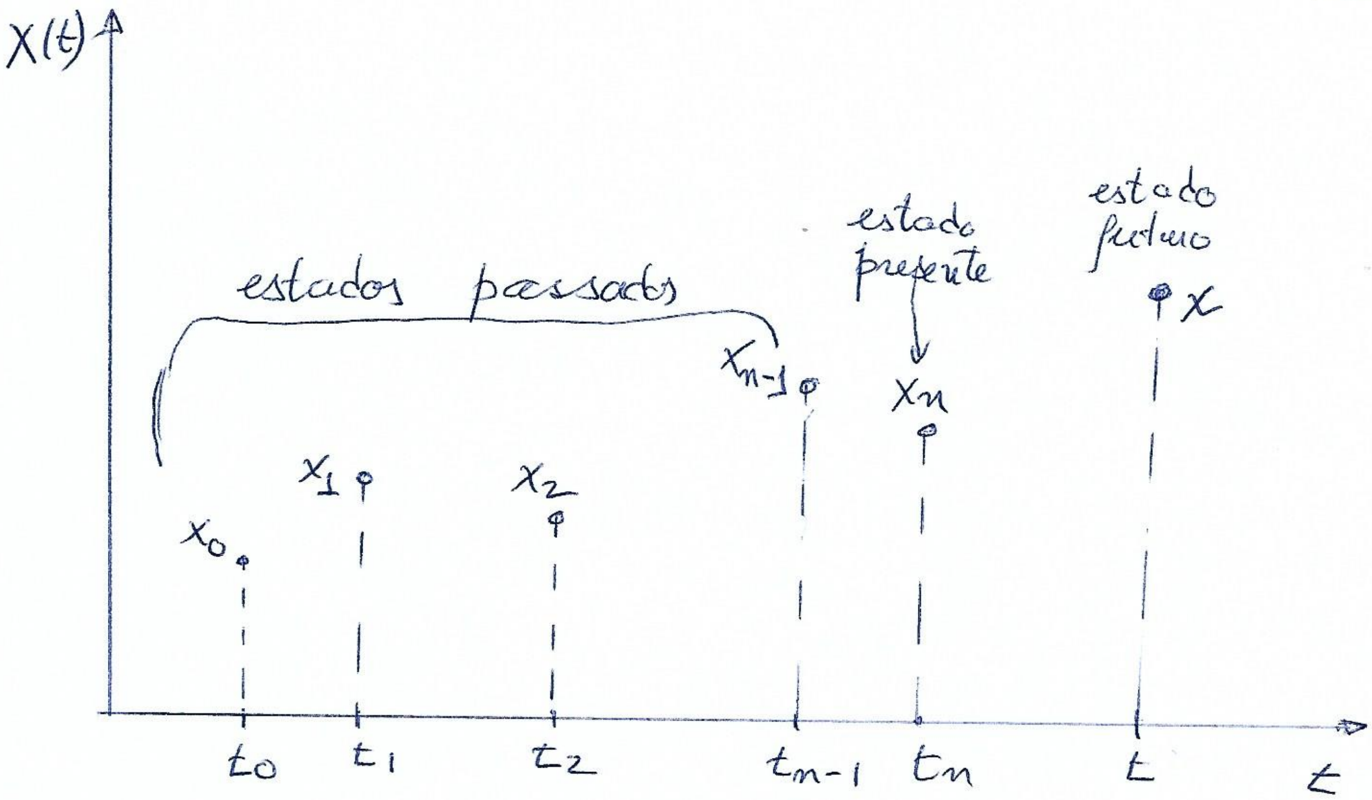

Figura 3. Ilustração esquemática referente à definição de processo Markoviano

Convém observar que a definição de processo Markoviano se aplica tanto a processos estocásticos em tempo discreto quanto a processos estocásticos em tempo contínuo; também cobre casos em que o espaço de estados é enumerável e casos em que o espaço de estados é um segmento dos reais.

2.6 Processo de contagem <u>definição</u>

Um processo estocástico em tempo contínuo $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem se $N(t)$ conta o número de eventos até o instante t.

3 _ Processo de Poisson

3.1 Definição 1

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson se:

i) $N(0) = 0$;

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

iii) Para quaisquer valores de $s, t \geq 0$, o número de eventos que ocorrem no intervalo $(s, s+t]$ é dado pela seguinte distribuição:

$$P\left[N(s+t) - N(s) = n\right] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad (2)$$

O parâmetro λ é chamado de taxa do processo.

Convém destacar que o processo de Poisson tem incrementos independentes (explicitado em (ii)) e estacionários, pois a distribuição do número de eventos (2) somente depende da amplitude do intervalo, t, e não da localização do intervalo no eixo dos reais não negativos.

3.2 Número médio de eventos em intervalo de amplitude t.

A partir de (2), o número médio de eventos num intervalo de amplitude t, $E[N(s+t)-N(s)]$ é dado por:

$$E[N(s+t)-N(s)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P[N(s+t)-N(s)=n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\lambda t)^{n-1}}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t \, e^{\lambda t} = \lambda t$$

Isto é,

$$E[N(s+t)-N(s)] = \lambda t \qquad (3)$$

3.3 Distribuição do intervalo até a ocorrência do primeiro evento e distribuição dos intervalos entre eventos consecutivos.

A Figura 4 apresenta uma amostra de eventos de um processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, com taxa λ. A variável aleatória X_1 designa o intervalo até a ocorrência do primeiro evento e X_i, $i = 2, 3, \ldots$, designa o intervalo entre eventos consecutivos $(i-1)$ e i. Seja ainda $S_0 = 0$ e $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$.

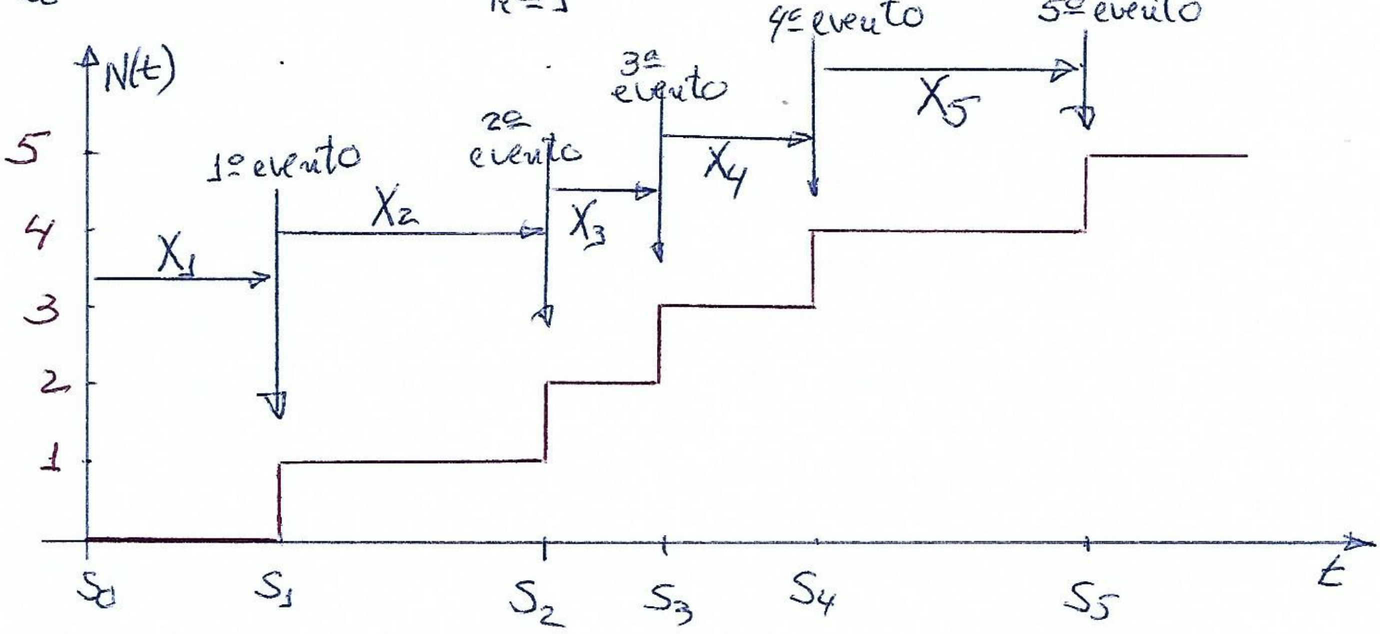

Figura 4 Amostra de eventos de um processo de Poisson

Distribuição da Variável X_1

Como X_1 é uma variável aleatória contínua, para calcular sua distribuição, deve-se considerar ou o evento $X_1 \leq t$ ou $X_1 > t$ e relacioná-lo com evento do processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. No caso, o caminho é utilizar $X_1 > t$, com a seguinte implicação:

$$X_1 > t \iff N(t) - N(0) = 0$$

(nenhum evento no intervalo $(0, t]$)

Então,

$$P[X_1 > t] = \bar{F}_{X_1}(t) = P[N(t) - N(0) = 0] = e^{-\lambda t}$$

Isto é,

$$\bar{F}_{X_1}(t) = e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

reconhecendo-se que X_1 é uma variável aleatória exponencial de média $1/\lambda$. (com função densidade de probabilidade $\lambda e^{-\lambda t}$.)

Distribuição da variável X_2

Uma vez que a variável X_2 é medida a partir da ocorrência do primeiro evento, admita-se inicialmente que $X_1 = s$. De maneira análoga, considere-se o evento $X_2 > t$; com a condicionante $X_1 = s$, isto implica que não há nenhum evento no intervalo $(s, s+t]$. Assim,

$$P[X_2 > t / X_1 = s] = P[N(s+t) - N(s) = 0] =$$

$$= e^{-\lambda t}$$

Dado que essa probabilidade condicional não depende do valor fixado para X_1, conclui-se que a probabilidade não condicionada $P[X_2 < t]$ tem esse mesmo valor. O mesmo resultado é obtido aplicando o procedimento utilizado ao se trabalhar com duas variáveis aleatórias.

$$P[X_2 > t] = \int_0^{\infty} P[X_2 > t / X_1 = s] f_{X_1}(s) ds =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}$$

Concluindo,

$$P[X_2 > t] = \bar{\bar{F}}_{X_2}(t) = e^{-\lambda t} \quad (5)$$

Ou seja, a variável aleatória X_2 também tem distribuição exponencial com média $1/\lambda$. De forma análoga, se mostra que $X_3, X_4, \dots$ têm distribuição exponencial de média $1/\lambda$.

A esta altura, é importante perceber a conexão entre os incrementos independentes e estacionários que governam a ocorrência de eventos do Processo de Poisson com a falta de memória dos intervalos entre os eventos do processo.

3.4 Distribuição do intervalo até a ocorrência do evento n, S_n.

O intervalo S_n até a ocorrência do evento é igual a soma de n variáveis aleatórias exponenciais de média $1/\lambda$.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (6)$$

Sendo S_n uma variável aleatória contínua, o caminho para obter sua distribuição é o mesmo utilizado para as variáveis X_1 e X_2; isto é considerar o evento $S_n \leq t$ ou $S_n > t$

e verificar as correspondentes implicações no processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. Optando-se por $S_n > t$,

$$S_n > t \iff N(t) - N(0) \leq n-1$$

$$\bar{F}_{S_n}(t) = P[N(t) - N(0) \leq n-1] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

e

$$F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} =$$

$$1 - \left(e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}}{2} + \frac{\lambda^3 t^3 e^{-\lambda t}}{6} + \cdots \right.$$

$$\left. + \cdots \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \right)$$

e a função densidade de probabilidade
da variável S_n, que se obtém derivando em
relação a t a função acumulado de probabi_
lidade $F_{S_n}(t)$, tem a seguinte expressão

$$f_{S_n}(t) = -\left(-\lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} + \right.$$

$$- \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2} + \frac{\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}}{2} - \frac{\lambda^4 t^3 e^{-\lambda t}}{3!} + \cdots$$

$$\left. - \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \right) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

Isto é

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \qquad (7)$$

conhecida como distribuição de Erlang de ordem n. Existe, portanto, uma família de distribuições Erlang, variando-se o número de parcelas de variáveis exponenciais, de mesma média, na soma.