PARES ORDENADOS E PRODUTO CARTESIANO

I. **Definições básicas:**

A nossa primeira definição fica justificada pelo seguinte resultado:

Teorema: Se $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$, então $a = c$ e $b = d$.

1. $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ (*par ordenado*).
2. Para A e B conjuntos, definimos o *produto cartesiano* de A e B por $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.
3. Definimos $(a,b,c) = ((a,b),c)$ (*tripla ordenada*) e $A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A,\ b \in B \text{ e } c \in C\}$. Analogamente podemos definir n-uplas e o produto cartesiano de um número finito de conjuntos.

II. **Exercícios:**
1. Mostre que se $(a,b) = (b,a)$ então $a = b$.
2. Mostre que $(a,b,c) = (a',b',c')$ implica $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.
3. Prove que $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ e que $a, b \in \bigcup(a,b)$. Mostre que de modo geral, se $a \in A$ e $b \in A$, então $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
4. Vamos dar uma definição alternativa para um par ordenado. Sejam $\square$ e $\triangle$ dois conjuntos quaisquer diferentes (por exemplo, $\square = \emptyset$ e $\triangle = \{\emptyset\}$) e defina

$$\langle a,b\rangle = \{\{a,\square\},\{b,\triangle\}\}.$$

Mostre que esta também é uma definição boa para par ordenado, ou seja, que $\langle a,b\rangle = \langle a',b'\rangle$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.
5. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:
(a) $A \times B = \emptyset$ se e somente se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
(c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ e $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
(d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ e $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
6. Para A, B, C, D conjuntos, mostre ou de contraexemplo (para as afirmações falsas mostre se alguma inclusão vale):
(i) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
(ii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
(iii) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.
7. Dê exemplos de conjuntos X, Y e Z tais que:
(a) $X \times Y \neq Y \times X$;
(b) $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$.
8. Mostre que se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \times C \subset B \times D$.
9. Dados $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, descrever e ilustrar graficamente os conjuntos: $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $(A \times A) \cap (B \times B)$, $(A \times A) \cup (B \times B)$, $(A \times B) \cup (B \times A)$, $(U \times A) \cap (U \times B)$; $(U \cap A) \times B$.