Matemática III

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

$1^{\underline{a}}$ Prova - Peso 1 - 20/09/2020

1. **Entrega: Até 27/09/2020**
2. A prova tem 13 pontos, e serão considerados 10 pontos para a nota.

Questão 1 *(1.0 ponto)* Considere o subconjunto $S \subset \mathbf{R}^4$ determinado pela equação $3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$.

(a) Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^4$. (b) Determine a dimensão de S (e justifique!).

Exercício 1 Seja $V = \{x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}\}$ o espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$ das sequências de números reais, e $V_0 \subset V$ o conjunto das sequências convergentes.
Notação: $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

(a) Mostre que V_0 é um subespaço vetorial de V.

(b) Qual a dimensão de V_0? Justifique sua resposta!

Exercício 2 Seja $W = \{x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},\ \text{e } \{n \in \mathbf{N} \mid x_n \neq 0\} \text{ é finito}\}$ o conjunto das sequências finalmente nulas de números reais, com a adição e a multiplicação por escalar usuais.

Seja $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots\}$ onde $e_k = (e_{k,n})_{n\in\mathbf{N}}$ é a sequência definida por $e_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ 1, & \text{se } n = k \end{cases}$.

(a) Mostre que W é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

(b) Decida se B é uma base de W. Justifique sua resposta!

Questão 2 *(2.0 pontos)* Seja $V = \{x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid x_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},\ \text{e } \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \text{ é finito}\}$, com a adição e a multiplicação por escalar usuais.

(a) Decida se V é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$. Justifique sua resposta!

(b) Caso a resposta em (a) seja afirmativa, determine qual a dimensão de V. Justifique sua resposta!

Exercício 3 Considere $V = \mathbf{R}^3$. Em cada item, decida se $A_j \subset V$ é ou não linearmente independente. Justifique sua resposta.

(a) $A_1 = \{(1,1,1)\}$ (b) $A_2 = \{(1,-3,5), (-2,6,-10)\}$ (c) $A_3 = \{(0,0,1), (0,2,1), (3,2,1)\}$

Exercício 4 Considere $V = C([0,1])$. Seja $A = \{u, v, w\} \subset V$ onde

$$u(x) = 1 + 2x^2, v(x) = 1 + 3x^2, w(t) = 1 + 4x^2.$$

Decida se A é ou não linearmente independente. Justifique sua resposta!

Questão 3 *(1.0 ponto)* Considere $V = C([0,1])$. Seja $A = \{f, g, h\} \subset V$ onde

$$f(x) = \cos x, g(x) = x\cos x, h(x) = x^2 \cos x.$$

Decida se A é ou não linearmente independente. Justifique sua resposta!

Questão 4 *(2.0 pontos)* Considere $V = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbf{R})$ o espaço vetorial das matrizes 2×3 com entradas reais. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in V$.

Em cada item, decida se $X_j \subset V$ é ou não linearmente independente. Justifique sua resposta.

(a) $X_1 = \{A, B\}$. (b) $X_2 = \{A, C\}$. (c) $X_3 = \{B, C\}$. (d) $X_4 = \{A, B, C\}$

Definição 1 *Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ é dita simétrica se $A^t = A$, e é dita antissimétrica se $A^t = -A$.*

Questão 5 *(1.0 ponto)* Considere $V = \mathcal{MA}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ o espaço vetorial das matrizes antissimétricas 3×3 com entradas reais. Sejam $A, B, C \in V$ definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\{A, B, C\}$ é gerador de V? (b) $\{A, B, C\}$ é base de V?

Questão 6 *(1.0 ponto)*

Considere a base $B = \{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$ de $\mathbf{R}^3$.

(a) Ache as componentes de $x = (x_1, x_2, x_3)$ na base B.

(b) Ache a representação matricial de x na base B.

Questão 7 *(1.0 ponto)*

Considere a base $B = \{U_1, U_2, U_3\}$ do espaço vetorial $\mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ das matrizes simétricas 2×2 com entradas reais, onde $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Ache as componentes de $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ na base B.

(b) Ache a representação matricial de X na base B.

Exercício 5 Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3 a coeficientes reais.

Considere $\langle \ \mid \ \rangle$ e $\langle\langle \ \mid \ \rangle\rangle$ definidos por $\langle\, p \mid q \,\rangle = p(-2)q(-2) + p(-1)q(1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ e $\langle\langle\, p \mid q \,\rangle\rangle = \int_{-2}^{2} p(t)q(t)dt$.

(a) Mostre que $\langle\langle \ \mid \ \rangle\rangle$ é um produto interno em V.

(b) Mostre que $\langle\langle \ \mid \ \rangle\rangle$ é um produto interno em V.

(c) Sejam $\| \ \|$ e $\||\ \||$ respecrtivamente as normas associadas aos produtos internos $\langle \ \mid \ \rangle$ e $\langle\langle \ \mid \ \rangle\rangle$ definidos em V.

Calcule $\|p\|$ e $\||p\||$ onde $p(t) = t^2 + t$.

(d) Considere em V o produto interno $\langle \ \mid \ \rangle$ e calcule o ângulo entre p e q, e $proj_q p$, onde $p(t) = t^2 + t$ e $q(t) = 1 + t$.

(e) Considere em V o produto interno $\langle\langle \ \mid \ \rangle\rangle$ e calcule o ângulo entre p e q, e $proj_q p$, onde $p(t) = t^2 + t$ e $q(t) = 1 + t$.

Questão 8 *(1.0 ponto)* Seja W o espaço vetorial das sequências de números reais que são finalmente nulas definido no exercício 2.

Para $x, y \in W$ seja $\langle\, x \mid y \,\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n y_n$.

(a) Mostre que $\langle\, x \mid y \,\rangle \in \mathbf{R}, \forall x, y \in W$.

(b) Devido a (a), fica definido $\langle \ \mid \ \rangle : W \times W \to \mathbf{R}$ por $\langle\, x \mid y \,\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n y_n$. Mostre que $\langle \ \mid \ \rangle$ é um produto interno em W.

(c) Sejam $u = (1,0,1,0,0,0,0,0,\ldots,0,0,\ldots), v = (2,2,2,2,2,2,0,0,\ldots,0,0,\ldots) \in W$. Calcule $\|u\|, \|w\|$ e o ângulo entre v e w.

Questão 9 *(2.0 ponto) DESAFIO* Seja V_0 o espaço vetorial das sequências convergentes de números reais. Se na questão 8 em vez de definirmos $\langle\, x \mid y \,\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n y_n$ para $x, y \in W$ tivéssemos definido $\langle\, x \mid y \,\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n y_n$ para $x, y \in V$, também teríamos como resultado um número real? Em caso afirmativo, $\langle \quad | \quad \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ seria um produto interno em V? Justifique suas respostas.

Exercício 6 Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ o espaço vetorial do exercício 5.

Mostre que tanto com o produto interno quanto com o produto interno $\langle \quad | \quad \rangle$ quanto com o produto interno $\langle\langle \quad | \quad \rangle\rangle$, se $p \in V$ é ímpar e $q \in V$ é par então p e q são ortogonais.

Questão 10 *(1.0 ponto)* Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ com o produto interno $\langle\langle \quad | \quad \rangle\rangle$ definidos no exercício 5, e sejam $p, q \in V$ definidos por $p(t) = t^2 + t$ e $q(t) = 1 + t$. Seja $u \in V$ definido por $u(t) = t^2 + t^3$.

Calcule a melhor de u no subespaço gerado por p e q.

Exercício 7 Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ com o produto interno $\langle\langle \quad | \quad \rangle\rangle$ definidos no exercício 5, e sejam $p, q \in V$ definidos por $p(t) = t^2 + t$ e $q(t) = 1 + t$. Seja $u \in V$ definido por $u(t) = t^2 + t^3$.

Use o Processo de Ortogonalizaçãi de Gram-Schmidt para ortogonalizar $\{p, q, u\}$.

"Geometria"

Exercício 8 Seja V um espaço vetorial, e sejam $w_1, w_2 \in V$ não nulos.

Mostre que duas retas $r_1 = \{P \in V \mid P = A_1 + tw_1, t \in \mathbf{R}\}$ e $r_2 = \{Q \in V \mid Q = A_2 + tw_2, t \in \mathbf{R}\}$ são iguais se e só se $A_1 \in r_2$ e w_1 e w_2 são l.d.

Exercício 9 Seja V um espaço vetorial, e $A, B \in V$.

Mostre que se $A \neq B$, a reta de equação vetorial $P = A + t(B - A), t \in \mathbf{R}$ passa por A e B, e que é a única reta de V que passa por A e B.

Exercício 10 Mostre que se $V = \mathbf{R}^2$, dada uma reta r e um ponto Q que não pertence a r, existe uma e uma única reta s que passa por Q e é paralela a r.