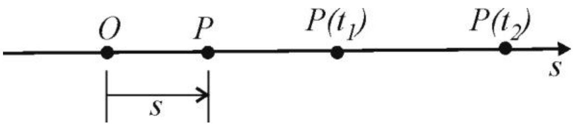
PME3100 Mecânica I

Cinemática do Ponto

Supõe-se um referencial fixo.

RECORDAÇÃO – Movimento retilíneo (qualquer)



Derivadas no tempo: $\dot{s}, \ddot{s}, \dot{v}$

Posição: $s(t)$

Velocidade:

$$v(t) = \lim_{(t_2 - t_1)\to 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Aceleração:

$$a(t) = \lim_{(t_2 - t_1)\to 0} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

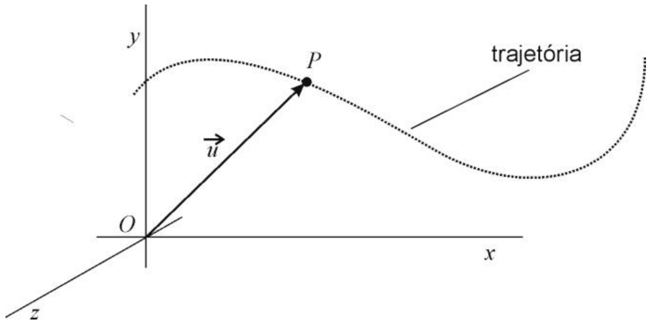
Cinemática do Ponto – Movimento Geral

1 – Geometria das curvas

1.1 – Vetor função de um parâmetro

Se um ponto P, ou um vetor $\vec{u} = P - O$, depende de um parâmetro τ real, dizemos que esse ponto ou vetor $\vec{u}$ é função de τ:

$$P = P(\tau)$$
ou
$$\vec{u} = \vec{u}(\tau)$$



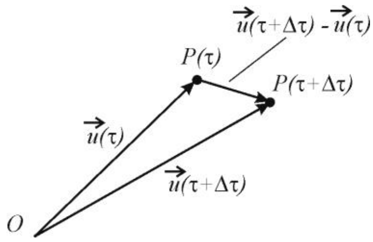
Usando um sistema de coordenadas cartesiano $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixo no espaço, e chamando de (x, y, z) as coordenadas de P, ou as componentes de $\vec{u}$, temos:

$$x = x(\tau); \;\; y = y(\tau); \;\; z = z(\tau)$$

e

$$P - O = \vec{u} = x(\tau)\vec{i} + y(\tau)\vec{j} + z(\tau)\vec{k}$$

Consideremos uma pequena variação de τ e vamos representá-la por $\Delta\tau$. O seguinte limite:



$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{x(\tau+\Delta\tau) - x(\tau)}{\Delta\tau}\vec{i} + \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{y(\tau+\Delta\tau) - y(\tau)}{\Delta\tau}\vec{j} + \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{z(\tau+\Delta\tau) - z(\tau)}{\Delta\tau}\vec{k} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta\tau}$$

se existir, será chamado de <u>*derivada de $\vec{u}(\tau)$ em relação ao parâmetro τ*</u>:

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Sejam os vetores $\vec{u}(\tau)$, $\vec{w}(\tau)$ e a função escalar $f(\tau)$. Supondo que sejam deriváveis, temos:

a) $\frac{d}{d\tau}(f \cdot \vec{u}) = f'\vec{u} + f\vec{u}'$

b) $\frac{d}{d\tau}(\vec{u} \cdot \vec{w}) = \vec{u}' \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}'$

c) $\frac{d}{d\tau}(\vec{u} \wedge \vec{w}) = \vec{u}' \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w}'$

IMPORTANTE: se o sistema de coordenadas $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ NÃO FOR FIXO, e também depender de τ, a derivada de $\vec{u}(\tau)$ em relação a τ será:

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = x'\vec{\imath} + x\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath} + y\vec{\jmath}' + z'\vec{k} + z\vec{k}'$$

Vetores de módulo constante

Derivando o quadrado do módulo do vetor $\vec{u}$ em relação a τ, obtemos:

$$\frac{d}{d\tau}|\vec{u}|^2 = \frac{d}{d\tau}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u}'$$

Se o módulo de $\vec{u}$ for constante, ou seja, for independente de τ, então:

$$\frac{d}{d\tau}|\vec{u}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$$

o que implica $\vec{u}' = \vec{0}$ ou $\vec{u}' \perp \vec{u}$.

Assim, podemos afirmar que, se o módulo de um vetor é constante, a derivada desse vetor ou é o vetor nulo, ou é um vetor ortogonal a $\vec{u}$.

1.2 – Curva função de um parâmetro

Seja $P(\tau)$ um ponto função de um parâmetro τ. Suas coordenadas $x(\tau), y(\tau)$ e $z(\tau)$ são as equações paramétricas da curva descrita por P no espaço quando τ varia. Assim, essa curva pode ser representada por:

$$P(\tau) = O + \vec{u}(\tau)$$

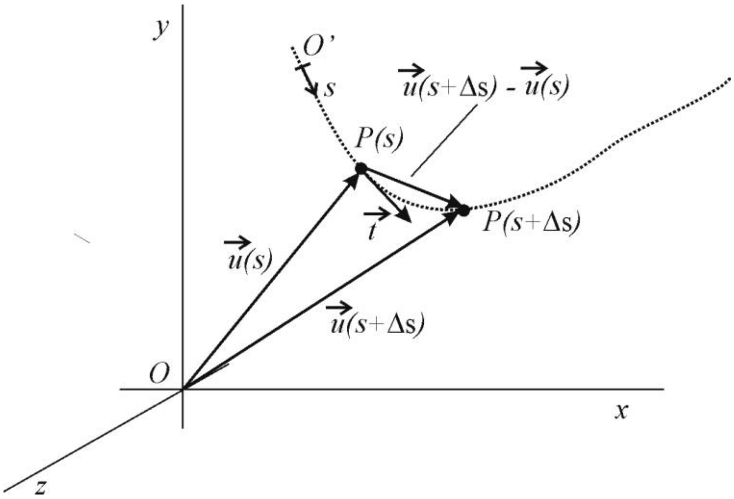
com $\vec{u}(\tau) = x(\tau)\vec{\imath} + y(\tau)\vec{\jmath} + z(\tau)\vec{k}$

Seja s o arco medido sobre a curva, a partir de uma certa origem e com uma orientação definida.

Podemos sempre escrever:

$$P = P(s) = O + \vec{u}(s)$$

onde s é uma função escalar do parâmetro τ



A derivada:

$$\vec{t} = \frac{dP(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{P(s+\Delta s) - P(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{u}(s+\Delta s) - \vec{u}(s)}{\Delta s}$$

é um <u>versor tangente à curva</u> e de mesmo sentido que o de s (comprimento de arco) crescente.

Este versor $\vec{t}$ é chamado de ***<u>versor tangente</u>***.

Como $|\vec{t}| = 1$ (constante), temos que:

$$\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

e, portanto, $\frac{d\vec{t}}{ds}$ é ortogonal a $\vec{t}$.

Temos, assim:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} = c\vec{n} \qquad (c \geq 0)$$

O escalar $\rho = \rho(s)$ chama-se raio de curvatura em *s*, e $c = c(s)$ é a curvatura em *s*. O versor $\vec{n}$ é o ***<u>versor normal</u>*** (principal).

Os versores $\vec{t}$ e $\vec{n}$ definem o *<u>plano osculador</u>* da curva no ponto, e ρ é o raio da circunferência osculadora, contida nesse plano.

Finalmente, vamos definir o versor $\vec{b}$ como:

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

O versor $\vec{b}$ é chamado ***<u>versor binormal</u>***.

Os versores $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ constituem o chamado ***<u>triedro de Frenet</u>***.

1.3 – Fórmulas de Frenet

Derivando a relação $\vec{b} \cdot \vec{t} = 0$, em relação a *s*, obtemos:

$$\frac{d}{ds}(\vec{b} \cdot \vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{b} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{t} + (\vec{t} \wedge \vec{n}) \cdot (c\vec{n}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t}$$

Como $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$ ($|\vec{b}| = $ cte), temos:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \parallel \vec{n} \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma\vec{n}$$

onde $\gamma = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n}$ é a chamada *<u>torção da curva</u>* em $P(s)$, e seu inverso $(\frac{1}{\gamma})$ chama-se *<u>raio de torção</u>*.

Derivando-se a relação $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ em relação a *s*, obtemos:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} = \gamma\vec{n} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge c\vec{n} = -\gamma\vec{b} - c\vec{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma\vec{b} - c\vec{t}$$

As três relações:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma\vec{b} - c\vec{t}$$

são as chamadas ***fórmulas de Frenet***.