

# CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

## FÍSICA IV — AULAS DE 24 DE AGOSTO A 15 DE SETEMBRO

TEXTO ATUALIZADO EM 19/09/2020

Estudaremos neste capítulo o movimento de cargas elétricas, impulsionado por fontes de tensão alternadas, em circuitos. Os circuitos que nos interessam são constituídos por elementos passivos: capacitores, indutores e resistores. Circuitos dessa natureza têm várias aplicações práticas, mas mais importante é o que eles nos ensinam sobre oscilações, escalas de tempo e álgebra linear, conforme veremos.

### ELEMENTOS DE CIRCUITO

A figura 1 mostra um circuito simples com uma fonte que produz uma tensão alternada

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

onde a amplitude  $\mathcal{E}_0$  (dimensão de potencial elétrico) e a frequência  $\omega$  são constantes. No instante  $t = 0$ , o terminal inferior da fonte de tensão tem potencial positivo, enquanto o potencial do terminal superior é negativo.

Os outros três elementos do circuito são nossos conhecidos, da Física III, mas vale a pena fazer uma rápida recordação.

#### Resistor

A figura 2 mostra um resistor, com resistência  $R$ . Uma corrente  $I$  atravessa o resistor. De acordo com a lei de Ohm, a diferença de potencial entre os dois terminais é

$$V_B - V_A = RI. \quad (2)$$

A corrente flui no sentido do campo elétrico, isto é, no sentido decrescente do potencial. Assim, na figura, o potencial do ponto  $B$  é maior do que o do ponto  $A$ , e a diferença  $V_B - V_A$  é positiva, em acordo com a Eq. (2).

#### Capacitor

O elemento na figura 3 é um capacitor de capacitância  $C$ . A diferença de potencial entre suas placas é proporcional à carga nele armazenada:

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

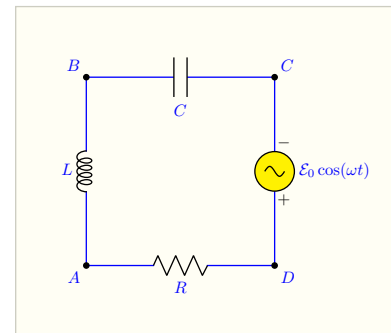


Figura 1: Circuito elétrico simples. O círculo amarelo representa uma fonte de tensão alternada. Os sinais  $\pm$  ao lado do gerador indicam a polaridade no instante  $t = 0$ . Os demais elementos são passivos.

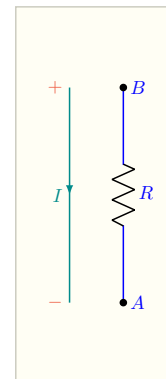


Figura 2: Resistor. O potencial diminui quando se atravessa o elemento no sentido da corrente.

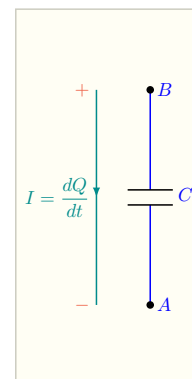


Figura 3: Capacitor. Como no resistor, o potencial decai no sentido da corrente.

O potencial da placa com carga positiva  $Q$  é maior do que o da outra placa, cuja carga é  $-Q$ . É conveniente visualizar a corrente como se as cargas em movimento, que chamamos de *portadores*, fossem positivas. Assim, a carga depositada na placa superior pela corrente na figura 3 é positiva; como na figura 2, o potencial diminui quando atravessamos o capacitor no sentido da corrente.

### Indutor

O terceiro elemento é o indutor, representado na figura 4. O indutor é um solenóide, que reage a variações na corrente  $I$  que o atravessa. A diferença de potencial entre os terminais  $A$  e  $B$  na figura é proporcional à derivada da corrente:

$$V_B - V_A = L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

Para conferir o sinal do lado direito da Eq. (4), vamos considerar o caso  $dI/dt > 0$  e voltar ao circuito da figura 1. Vamos supor que a corrente naquele circuito tenha o sentido antihorário, para que  $I$  corra de cima para baixo ao passar pelo indutor. De acordo com a lei de Lenz, a diferença de potencial deve opor-se à variação da corrente. Para isso, o potencial no terminal superior do indutor deve ser superior ao do terminal inferior, pois essa diferença de potencial tenderá a empurrar a corrente no sentido horário.

Podemos agora voltar à figura 4, para ver que, para  $dI/dt > 0$ , o potencial do terminal  $B$  (superior) deve ser mais alto do que o do terminal  $A$  (inferior). Isso mostra que o sinal do lado direito na Eq. (4) é o correto.

Ao analisar circuitos elétricos, é sempre conveniente admitir que a carga  $Q$  num capacitor e a derivada  $dI/dt$  da corrente através de um indutor têm o sinal positivo. Com isso, a diferença de potencial entre os terminais dos três elementos passivos pode ser facilmente determinada: basta lembrar que o potencial cai quando se avança na mão de trânsito da corrente ou que aumenta quando se avança na contramão da corrente.

Essa regra não se estende às fontes de tensão, alternadas ou contínuas. O sinal da diferença de potencial em uma fonte de corrente alternada, por exemplo, varia periodicamente com o tempo de forma predeterminada, independente da hipótese que se faz sobre o sentido da corrente. A próxima seção ajuda a entender.

## LEI DAS MALHAS

Queremos encontrar a corrente no circuito da figura 1. Como sempre, as leis de Kirchoff definem o ponto de partida. O circuito é simples,

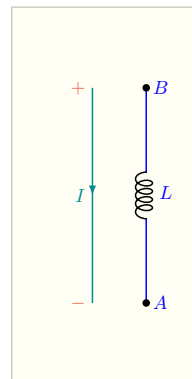


Figura 4: Indutor. Para correntes crescentes, o potencial de  $B$  será maior do que o de  $A$ .

constituído por uma única malha. Por isso, podemos dispensar a lei dos nós e concentrar nossa atenção na das malhas. Para aplicá-las, começaremos num ponto qualquer do circuito e o percorreremos ao longo de um caminho fechado. A soma das diferenças de potencial, conforme se vê em Física III, deve ser zero.

Para calcular a diferença de potencial entre os terminais de cada elemento, precisamos definir um sentido para a corrente. A escolha é arbitrária. Se estiver errada, a corrente  $I$  calculada no final será negativa. No caso, como a fonte de tensão é alternada, a corrente deve inverter-se a cada período. Já sabemos, portanto, que o sentido escolhido na figura 5 será incorreto metade do tempo; podemos esperar que o sinal de  $I(t)$  se inverta com a frequência  $\omega$  que aparece na Eq. (1).

Na figura 5, a seta azul indica que escolhemos o sentido horário. Percorremos o circuito também no sentido horário:  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Com isso, avançamos sempre na mão da corrente, e o potencial decai cada vez que atravessamos um elemento passivo. Ao atravessar a fonte de tensão, passamos do polo superior, negativo, para o inferior, positivo, e o potencial cresce.

Igualada a zero a soma das diferenças de potencial indicadas ao longo da circunferência laranja na figura, chegamos à igualdade

$$-L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} + \mathcal{E} - RI = 0. \quad (5)$$

Para ficar com uma só variável, em lugar de duas, no lado esquerdo da Eq. (5), podemos lembrar que  $I = dQ/dt$  e substituir, também,  $dI/dt$  por  $d^2I/dt^2$ . Podemos aproveitar a oportunidade para deixar as contribuições que dependem da carga à esquerda e passar a força eletromotriz da fonte de tensão para a direita. Com isso, teremos que

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (6)$$

A Eq. (6) já está na forma padrão na qual se deve escrever uma equação diferencial: os termos que dependem da variável  $Q$  estão do lado esquerdo, em ordem decrescente das derivadas, e a função independente de  $Q$  está no lado direito. Essa disposição permite reconhecer que ela é uma equação diferencial *ordinária, linear, de segunda ordem, não-homogênea e com coeficientes constantes*.

É *linear* porque cada uma das parcelas que depende de  $Q$  é proporcional à carga ou a uma de suas derivadas. Significa que, se multiplicarmos  $Q$  por um número qualquer  $\lambda$ , o lado esquerdo ficará multiplicado por  $\lambda$ . Isso não aconteceria, por exemplo, se o último termo à direita fosse proporcional a  $Q^2$  ou a  $Q dQ/dt$ , casos em que a equação seria não-linear.

A equação é *ordinária* porque as derivadas são ordinárias: nenhuma delas é derivada parcial. Sua *ordem* é a da derivada mais alta,  $d^2Q/dt^2$ .

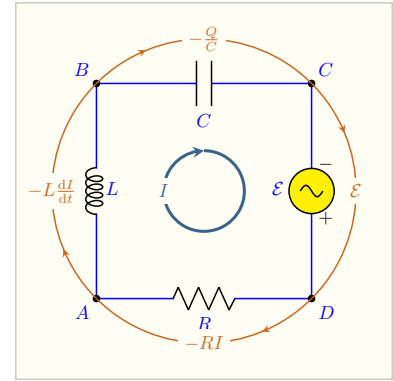


Figura 5: Lei das malhas aplicada ao circuito da figura 1. As diferenças de potencial anotadas em cor laranja somam zero.

A equação seria *homogênea* se o lado direito fosse zero; nessa hipótese, se  $Q(t)$  obedecesse à equação, então  $\lambda Q(t)$  também satisfaria. No caso, porém, a equação é *não-homogênea*.

A equação tem *coeficiente constantes* porque os fatores multiplicando  $Q$ ,  $dQ/dt$  e  $d^2Q/dt^2$  no lado direito são constantes ( $1/C$ ,  $R$  e  $L$ ), independentes do tempo. O procedimento que discutiremos a seguir vale para qualquer equação ordinária e linear com coeficientes constantes, mesmo que sua ordem seja mais alta.

## CONDIÇÕES INICIAIS

A Eq. (6) não é suficiente para encontrarmos a carga  $Q$  como função do tempo. Precisamos, também, da carga inicial  $Q(t=0)$  e da corrente inicial  $I(t=0)$ . Supomos que essas duas grandezas sejam dadas:

$$Q(0) = Q_0 \quad (7)$$

e

$$I(0) = I_0, \quad (8)$$

onde  $Q_0$  é uma carga conhecida e  $I_0$ , uma corrente conhecida.

As Eqs. (6), (7) e (8) definem o problema matemático que devemos resolver.

## EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEA E HOMOGÊNEA

Calcular a carga  $Q(t)$  no capacitor da figura 1 equivale a encontrar uma função que obedece à equação diferencial (6) e satisfaz às condições iniciais (7) e (8). Veremos mais adiante que é relativamente fácil encontrar uma solução  $Q = q(t)$  da Eq. (6); infelizmente, a não ser em condições muito especiais, essa solução não satisfará às condições iniciais. Nosso problema, portanto, se reduz a outro: dado uma função  $q(t)$  que obedece à Eq. (6), mas não satisfaz as condições iniciais (7) e (8), encontrar a solução que satisfaz tanto a equação diferencial como as condições iniciais.

A ilustração na figura 6 nos ajuda a entender. O plano nela representado contém todas as funções do tempo que obedecem à Eq. (6). Cada uma delas tem um valor inicial  $Q(0)$  e uma derivada inicial  $I(0)$ . Uma das funções, indicada pelo símbolo  $\otimes$  é a solução desejada, que satisfaz as condições iniciais que nos interessam. A função  $q(t)$ , indicada pelo símbolo  $\otimes$  azul, é a solução que encontraremos abaixo. Ela obedece a Eq. (6), mas sua carga inicial e sua corrente inicial, em geral, estão em desacordo com as Eqs. (7) e (8).

Podem parecer que a diferença  $\Delta Q$ , entre  $q(t)$  e  $Q(t)$ , obedece a Eq. (6), mas isso não é verdade. Para verificar, devemos lembrar que

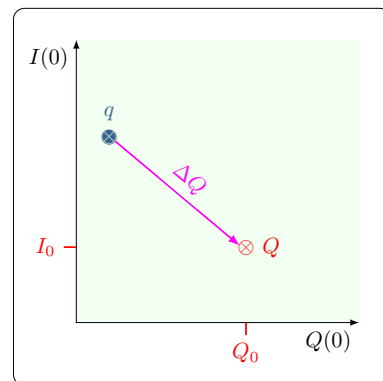


Figura 6: Espaço das soluções da Eq. (6). Cada ponto do plano corresponde a uma solução, que satisfaz a um par de condições iniciais  $[Q(0), I(0)]$ . A solução  $q(t)$ , indicada pelo símbolo  $\otimes$  azul, é a função que encontraremos mais adiante, e a solução  $Q(t)$ , indicada pelo símbolo vermelho, é a função que satisfaz as condições iniciais dadas.

tanto  $q(t)$  como  $Q(t)$  são soluções da equação diferencial. Temos, portanto, que

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t). \quad (9)$$

Subtraímos, agora, a Eq. (9) da Eq. (6). Resulta que

$$L \frac{d^2 \Delta Q}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q}{dt} + \frac{\Delta Q}{C} = 0. \quad (10)$$

Em outras palavras, a função  $\Delta Q$  satisfaz a uma equação diferencial homogênea. Essa equação é a igualdade que se obtém da Eq. (6) quando se escreve zero no lado direito, no lugar de  $\mathcal{E}$ . Por isso, ela é chamada de *equação homogênea associada* à equação não-homogênea. Nossa primeira tarefa, portanto, é resolver a equação diferencial homogênea associada à Eq. (6). Para isso, convém estudar a Eq. (10).

### A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

Suponhamos que  $\Delta Q_1(t)$  e  $\Delta Q_2(t)$  sejam duas funções distintas, tais que  $Q_2(t)$  não seja proporcional a  $Q_1(t)$ , que obedecem à Eq. (10). Podemos facilmente mostrar que qualquer combinação linear  $\Delta Q_3(t) = \alpha \Delta Q_1 + \beta \Delta Q_2$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são duas constantes, também obedece à mesma equação. Para isso, notamos que

$$L \frac{d^2 \Delta Q_1}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_1}{dt} + \frac{\Delta Q_1}{C} = 0 \quad (11)$$

e

$$L \frac{d^2 \Delta Q_2}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_2}{dt} + \frac{\Delta Q_2}{C} = 0, \quad (12)$$

já que as duas funções são soluções da equação homogênea.

Se agora multiplicarmos os dois lados da Eq. (11) por  $\alpha$  e os dois lados da Eq. (12) por  $\beta$  e somarmos os resultados, veremos que

$$L \frac{d^2 \Delta Q_3}{dt^2} + R \frac{d\Delta Q_3}{dt} + \frac{\Delta Q_3}{C} = 0. \quad (13)$$

Como queríamos demonstrar, a combinação linear  $\Delta Q_3(t)$  obedece à equação diferencial homogênea.

*A equação homogênea somente admite duas soluções linearmente independentes*

Mais ainda, podemos mostrar que qualquer solução da equação homogênea é combinação linear de  $Q_1(t)$  e  $Q_2(t)$ . A demonstração é por redução ao absurdo.

Suponhamos que exista uma função  $\bar{Q}(t)$  que obedeça a Eq. (10), mas não seja combinação linear de  $Q_1$  e  $Q_2$ . A função  $\bar{Q}$  representa uma carga que varia com o tempo. Ela define, portanto, uma carga inicial, e sua derivada é uma corrente inicial. Vamos chamar de  $\bar{q}$  e  $\bar{i}$  a carga e a corrente iniciais:

$$\bar{Q}(0) = \bar{q} \quad (14)$$

e

$$\left. \frac{d\bar{Q}}{dt} \right|_0 = \bar{i}. \quad (15)$$

De maneira análoga, vamos chamar de  $q_1$  e  $i_1$  a carga e a corrente iniciais da solução  $Q_1(t)$  e vamos chamar de  $q_2$  e  $i_2$  a carga e a corrente iniciais da solução  $Q_2(t)$ .

Dadas essas cargas e correntes iniciais, poderemos sempre encontrar duas constantes  $a$  e  $b$  tais que

$$aq_1 + bq_2 = \bar{q} \quad (16)$$

e

$$ai_1 + bi_2 = \bar{i}. \quad (17)$$

De fato, as Eqs. (16) e (17) podem ser vistas como um sistema linear de duas equações com duas incógnitas ( $a$  e  $b$ ). Resolvido esse sistema, encontraremos as duas constantes.

Uma vez que tenhamos encontrado as duas constantes, poderemos construir a combinação linear

$$f(t) = aQ_1(t) + bQ_2(t). \quad (18)$$

A Eq. (16) mostra que  $f(0) = \bar{q}$ , e a Eq. (17) mostra que  $df/dt|_{t=0} = \bar{i}$ . Vemos, portanto, que a função  $f(t)$  obedece à equação homogênea (10) e satisfaz às condições iniciais nos lados direitos das Eqs. (14) e (15). Logo,  $f(t)$  é idêntica a  $\bar{Q}(t)$ . Podemos, portanto, escrever a Eq. (18) na forma

$$\bar{Q}(t) = aQ_1(t) + bQ_2(t), \quad (19)$$

o que contradiz a hipótese inicial.

Concluimos que a equação homogênea tem apenas duas soluções linearmente independentes.

Como a figura 6 sugere, as soluções da equação homogênea formam um espaço vetorial com duas dimensões. Para resolver a equação homogênea, temos apenas de encontrar duas soluções **distintas**.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A geometria analítica mostra que, num plano, há somente dois vetores linearmente independentes. Como consequência, todos os vetores de um plano podem ser escritos como combinação lineares de dois versores de base ( $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , por exemplo). Analogamente, mostramos que há somente duas soluções linearmente independentes da equação homogênea (10). Isso significa que, se encontrarmos duas soluções distintas, poderemos escrever qualquer outra como combinação linear das duas.

*Solução da equação homogênea.*

Antes de começar a resolver a Eq. (10), vale a pena simplificá-la. Para isso, dividimos os dois lados por  $L$ , para eliminar o fator no primeiro termo à esquerda, e definimos o *tempo de relaxação*

$$\tau \equiv \frac{2L}{R} \quad (20)$$

e a *frequência de oscilação*

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (21)$$

que denotamos  $\omega_0$  para evitar confusão com a frequência  $\omega$  da fonte de tensão na Eq. (1).

Conforme veremos mais abaixo,  $\tau$  define a *escala de tempo*<sup>2</sup> em que a corrente decai num circuito  $RL$  (como o da figura 1, sem capacitor ou fonte tensão), e  $\omega_0$  é a frequência com que oscila a corrente num circuito  $LC$  (como o da figura 1, sem resistor ou fonte tensão). Por ora,  $\tau$  e  $\omega_0$  são duas definições que abreviam a notação. Com essas definições, podemos reescrever a Eq. (10) na *forma*<sup>3</sup>

$$\frac{d^2\Delta Q}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\Delta Q}{dt} + \omega_0^2 \Delta Q = 0. \quad (22)$$

Para resolver a Eq. (22), procuramos uma solução da forma

$$\Delta Q(t) = \exp(st), \quad (23)$$

onde  $s$  é uma constante que deveremos determinar.

Substituímos em seguida o lado direito da Eq. (23) no lugar de  $\Delta Q$  na Eq. (22). Uma vez que derivar a exponencial equivale a multiplicá-la por  $s$ , somos conduzidos à expressão

$$s^2 \exp(st) + \frac{2s}{\tau} \exp(st) + \omega_0^2 \exp(st) = 0. \quad (24)$$

Como o fator  $\exp(st)$ , que aparece em cada termo no lado esquerdo, nunca se anula, podemos dividir os dois lados por ele. Encontramos, então, a equação do segundo grau

$$s^2 + \frac{2s}{\tau} + \omega_0^2 = 0, \quad (25)$$

cujas soluções são

$$s = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (26)$$

Temos, assim, duas soluções distintas para a Eq. (22):

$$\Delta Q_+(t) = \exp(s_+ t), \quad (27)$$

<sup>2</sup> É fácil mostrar que  $\tau$  tem dimensão de tempo. A lei de Ohm nos diz que

$$[R] = \frac{[V]}{[I]}, \quad (3.1)$$

onde  $[G]$  significa *dimensão da grandeza G* e  $V$  denota o potencial. Por outro lado, já vimos que a diferença de potencial no indutor é  $L \, dI/dt$ ; assim

$$[L] = \frac{[V][T]}{[I]}, \quad (3.2)$$

onde  $T$  denota a grandeza tempo.

Se dividirmos a Eq. (3.2) pela Eq. (3.1), veremos que

$$\frac{[L]}{[R]} = [T], \quad (3.3)$$

o que confirma que o lado direito da Eq. (20) tem dimensão de tempo. De forma análoga, podemos mostrar que  $\omega_0$  tem dimensão  $1/[T]$ , ou frequência.

<sup>3</sup> Todos os termos no lado esquerdo da Eq. (22) têm a mesma dimensão. A dimensão do primeiro termo é  $[Q]/[T]^2$ . A do segundo é também  $[Q]/[T]^2$ , já que  $\tau$  é um tempo. E a dimensão do terceiro termo à esquerda é  $[Q]/[T]^2$  porque  $\omega_0$  é uma frequência.

onde

$$s_+ = -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (28)$$

e

$$\Delta Q_-(t) = \exp(s_- t), \quad (29)$$

onde

$$s_- = -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (30)$$

### *Competição entre escalas de tempo*

A Eq. (26) mostra que a frequência de oscilação compete com o inverso do tempo relaxação. Se  $\omega_0 < 1/\tau$  (isto é, se  $\omega_0\tau < 1$ ) o radicando à direita é positivo, e tanto  $s_+$  como  $s_-$  são números reais. Já se  $\omega_0 > 1/\tau$ , o radicando é negativo, e a raiz quadrada é um número imaginário. No primeiro caso, os lados direitos das Eqs. (27) e (29) são reais; no segundo, eles são complexos. É bom discutirmos cada possibilidade separadamente.

### *Caso $\omega_0\tau > 1$ : circuito subamortecido*

Quando o radicando na Eq. (26) é negativo, é mais fácil definir a frequência positiva

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}, \quad (31)$$

que é menor do que  $\omega_0$ .

Com essa definição, a Eq. (30) fica abreviada:

$$s_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_1. \quad (32)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária.

Nesse caso, como já notamos, os lados direitos das Eqs. (27) e (29) são complexos. Podemos, entretanto, trabalhar com funções reais. Para isso, recordamos que qualquer combinação linear de duas soluções da equação homogênea é também solução. Assim, em lugar de trabalhar com as funções definidas nas duas equações, é preferível trabalhar com a soma e com a diferença delas:

$$Q_+ \pm Q_- = \exp(-t/\tau) \left( \exp(i\omega_1 t) \pm \exp(-i\omega_1 t) \right). \quad (33)$$



Da expressão de Euler,  $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ , sabemos que a soma de exponenciais no lado direito da Eq. (33) é proporcional a  $\cos(\omega_1 t)$  e que a diferença é proporcional a  $\text{sen}(\omega_1 t)$ :

$$Q_+ + Q_- = 2 \exp(-t/\tau) \cos(\omega_1 t), \quad (34)$$

e

$$Q_+ - Q_- = 2i \exp(-t/\tau) \text{sen}(\omega_1 t). \quad (35)$$

Os fatores 2 no lado direito da Eq. (34) e  $2i$  no da Eq. (35) não são importantes, porque estaremos sempre interessados em combinações lineares das duas soluções. Como o lado direito da Eq. (34) tende a 2 quando  $t \rightarrow 0$ , é conveniente definir uma função igual ao lado direito dividido por 2, para que a solução tenda à unidade quando  $t \rightarrow 0$ . Chamaremos essa função de  $Q_x$ , para lembrar que ela funciona como um versor de base ( $\hat{x}$ ) na geometria analítica:

$$Q_x(t) \equiv \exp(-t/\tau) \cos(\omega_1 t). \quad (36)$$

Vamos ver, agora, a Eq. (35). A função  $\text{sen}(\omega_0 t)$  no lado direito tende a zero quando  $t \rightarrow 0$ . Por isso, é impossível dividi-la por um fator para fazer a função tender à unidade em  $t = 0$ . Entretanto, se derivarmos os dois lados em relação ao tempo, veremos que

$$\frac{d(Q_+ - Q_-)}{dt} = 2i \exp(-t/\tau) \left( -\frac{1}{\tau} \text{sen}(\omega_1 t) + \omega_1 \cos(\omega_1 t) \right). \quad (37)$$

O lado direito da Eq. (37) tende a  $2i\omega_1$  quando  $t \rightarrow 0$ . Para obter um valor real e unitário, definimos uma função  $Q_y$  igual ao lado direito da Eq. (35) dividido por  $2i\omega_1$ , ou seja,

$$Q_y = \exp(-t/\tau) \frac{\text{sen}(\omega_1 t)}{\omega_1}, \quad (38)$$

de forma que a corrente  $I_s = dQ_y/dt$  seja  $I_y = 1$  em  $t = 0$ .

As duas funções reais  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  são soluções da equação diferencial homogênea (22). Sempre que  $\omega_0 \tau > 1$ , qualquer outra solução da homogênea poderá ser escrita como combinação linear das duas. Em outras palavras, as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  equivalem aos versores  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  da geometria analítica. Aqui, não existe função equivalente a  $\hat{z}$ , porque o espaço vetorial, representado esquematicamente pelo plano da figura 6, tem **duas dimensões**.<sup>4</sup>

As figuras 7 e 8 mostram  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  para um mesmo circuito, com os valores indicados de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . A frequência  $\omega_0 = 0.71 \text{ rad/s}$  é grande em comparação com o inverso  $1/\tau = 1/40 \text{ s}^{-1}$  do tempo de relaxação.

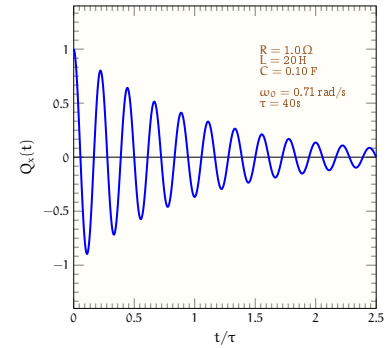


Figura 7: A função  $Q_x(t)$ , definida pela Eq. (36) para um circuito com os valores indicados de  $L$ ,  $R$  e  $C$ . Em  $t = 0$ , a carga é unitária.

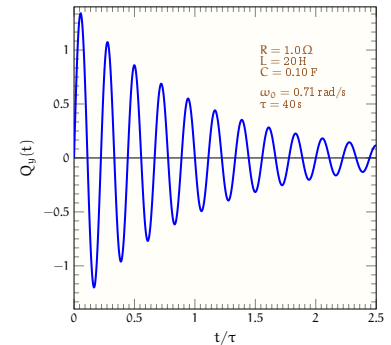


Figura 8: A função  $Q_y(t)$ , definida pela Eq. (38). Parâmetros idênticos aos da figura 7. No instante  $t = 0$ , a carga é nula, mas a corrente  $dQ_y/dt$  é unitária.

<sup>4</sup> Sabemos que o espaço vetorial tem duas dimensões porque ele admite somente duas funções linearmente independentes.

Como os dois gráficos mostram, a carga decai na escala de tempo  $\tau$ . Em cada figura, no extremo direito, quando o tempo  $t$  chega a  $2.5\tau$ , a carga já é bem menor do que no início. Entretanto, como a frequência  $\omega_0$  é bem maior do que  $1/\tau$ , o circuito tem tempo para oscilar mais de dez vezes no intervalo de tempo retratado pelos gráficos.

A carga decai em função do tempo porque a função exponencial nos lados direitos das Eqs. (36) e (38) vai a zero. As funções trigonométricas que multiplicam a exponencial fazem a carga oscilar à medida que decai. Dizemos que o circuito é *subamortecido*.

Como você deve ter aprendido em Física I, o um oscilador harmônico mecânico sujeito a pouco atrito viscoso exibe o mesmo comportamento e é também chamado de subamortecido. Não surpreende, porque a equação diferencial para um oscilador harmônico amortecido livre é equivalente à Eq. (22). Se houver mais amortecimento, isto é, mais atrito viscoso, o oscilador harmônico deixará de oscilar, como veremos nas próximas duas seções.

#### Caso $\omega_0\tau < 1$ : circuito superamortecido

Para  $\omega_0\tau < 1$ , as duas raízes no lado direito da Eq. (30) são reais. As duas funções definidas nas Eqs. (27) e (29) são, portanto, reais. Podemos expressar qualquer solução da equação homogênea como combinação linear das duas. Apesar disso, é conveniente definir funções análogas às das Eqs. (36)(38). Com esse objetivo, em analogia com a frequência  $\omega_1$ , definimos um segundo tempo de relaxação  $\tau_1$  pela equação

$$\frac{1}{\tau_1} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}. \quad (39)$$

A subtração no radicando no lado direito da Eq. (39) faz com que  $1/\tau_1 < 1/\tau$ , ou seja, que  $\tau > \tau_1$ .

Assim, podemos desdobrar a Eq. (26) nas igualdades

$$s_+ = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} \quad (40)$$

e

$$s_- = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1}. \quad (41)$$

Em seguida, por analogia com a Eq. (33), podemos escrever duas combinações lineares das soluções nas Eqs. (27) e (29):

$$Q_+ \pm Q_- = \exp(-t/\tau) \left( \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \pm \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right). \quad (42)$$

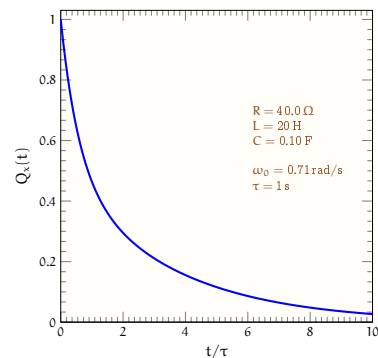


Figura 9: A função  $Q_x$  definida pela Eq. (43), para um circuito superamortecido. Em  $t = 0$  a carga é unitária.

Como as exponenciais dentro dos parênteses à direita são reais, desta vez encontramos funções hiperbólicas, em lugar de funções trigonométricas. Como na Seção *Caso*  $\omega_0\tau > 1$ : *circuito subamortecido*, queremos que a função resultante da soma entre parênteses tenha valor unitário no instante  $t = 0$  e que a função resultante da diferença tenha derivada unitária em  $t = 0$ . A álgebra é muito semelhante e nos leva às funções

$$Q_x(t) = \exp(-t/\tau) \cosh(t/\tau_1) \quad (43)$$

e

$$Q_y(t) = \tau_1 \exp(-t/\tau) \sinh(t/\tau_1). \quad (44)$$

Como há perfeita correspondência com as funções definidas pelas Eqs. (36) e (38), empregamos as mesmas letras para representar umas e outras.

As figuras 9 e 10 mostram as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  para um circuito com  $L = 20\text{H}$  e  $C = 0.10\text{F}$ , como nas figuras 7 e 8, mas com resistência maior,  $R = 20\Omega$ . A desigualdade  $\omega_0\tau < 1$  classifica o circuito como superamortecido. Como a figura 9 mostra, a função  $Q_x(t)$  decai monotonicamente a zero.

A função  $Q_y(t)$  cresce, inicialmente, porque sua derivada em  $t = 0$ , por definição, é unitária. Logo depois, porém, ela alcança um máximo e **passa a decair**.<sup>5</sup>

Para  $\omega_0\tau < 1$ , qualquer solução da equação homogênea (22) pode ser escrita como combinação linear das funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  definidas pelas Eqs. (43) e (44).

*Caso*  $\omega_0\tau = 1$ : *circuito criticamente amortecido*.

A condição  $\omega_0\tau = 1$  define o circuito *criticamente amortecido*, que separa o regime superamortecido ( $\omega_0\tau < 1$ ) do subamortecido ( $\omega_0\tau > 1$ ). O caso criticamente amortecido é especial porque o número de raízes no lado direito da Eq. (26) deixa de ser dois. Com  $\omega_0\tau = 1$ , a raiz quadrada no lado direito é nula e há apenas uma raiz,

$$s = -\frac{1}{\tau}. \quad (45)$$

Assim, a hipótese de que as soluções da Eq. (22) são da forma  $\exp(st)$  parece conduzir a apenas um resultado,

$$\Delta Q(t) = \exp(-t/\tau). \quad (46)$$

Como precisamos de duas soluções, isso é insuficiente. Entretanto, podemos ver o amortecimento crítico como limite do **subamortecimento** quando  $\omega_0\tau \rightarrow 1$ .

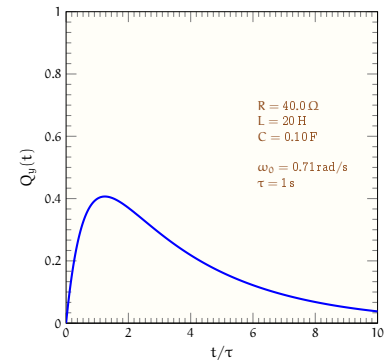


Figura 10: A função  $Q_y$  definida pela Eq. (44), para um circuito superamortecido. Em  $t = 0$  a carga é nula, mas a corrente é unitária.

<sup>5</sup> As duas funções hiperbólicas nos lados direitos das Eqs. (43) e (44) crescem exponencialmente para  $t \rightarrow \infty$ , mas como  $1/\tau_1$  é menor do que  $1/\tau$ , a exponencial decrescente  $\exp(-t/\tau)$  faz o produto decrescer à medida que  $t$  aumenta.

Em lugar de pensar no caso criticamente amortecido como limite do regime subamortecido, podemos encará-lo como limite do regime superamortecido. Para isso, temos de voltar à Eq. (39) para ver que, quando  $\omega_0\tau \rightarrow 1$ , o lado direito tende a zero. Quer dizer que  $1/\tau_1 \rightarrow 0$ . O argumento do seno hiperbólico no lado direito da Eq. (44) é, portanto, muito pequeno, e  $\sinh(t/\tau_1)$  tende a  $t/\tau_1$ . Assim, a Eq. (44) se reduz à forma

$$Q_y = t \exp(-t/\tau) \quad (\omega\tau = 1),$$

exatamente como na Eq. (48).

Na prática, significa examinar as Eqs. (36) e (38) nesse limite. Com  $\omega_0\tau = 1$ , o lado direito da Eq. (31) se anula. Assim,  $\omega_1 = 0$ . A Eq. (36) mostra, imediatamente, que

$$Q_x(t) = \exp(-t/\tau) \quad (\omega_0\tau = 1). \quad (47)$$

Essa igualdade coincide com a Eq. (46) e não traz, portanto, nada de novo. Não nos ajuda a encontrar uma segunda solução.

A Eq. (38) é mais instrutiva. No limite  $\omega_1\tau \rightarrow 0$ , a razão  $\sin(\omega_1 t)/\omega_1$  tende a  $t$ . Consequentemente, a Eq. (44) se reduz a

$$Q_y(t) = t \exp(-t/\tau) \quad (\omega_0\tau = 1). \quad (48)$$

Esta é a solução que procurávamos: ela obedece a equação homogênea (22) e é distinta da função na Eq. (47).

As figuras 11 e 12 mostram as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  para um circuito criticamente amortecido. O gráfico na primeira figura é muito parecido com o da figura 9. Isso não é surpresa, porque o produto  $\omega_0\tau$  nesta última vale 0.71, muito perto da unidade. Da mesma forma, o gráfico na figura 12 é semelhante ao da figura 10.

O decaimento nas figuras 11 e 12 é, porém, mais rápido do que nas figuras 9 e 10. Se começarmos com o circuito criticamente amortecido ( $\omega_0\tau = 1$ ) e reduzirmos progressivamente  $\omega\tau$ , veremos que as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  decaem mais e mais devagar à medida que o amortecimento cresce, porque as funções hiperbólicas que multiplicam  $\exp(-t/\tau)$  no regime superamortecido parcialmente compensam o decaimento exponencial.

### Quadro geral

Em resumo, encontramos as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  para os regimes super- sub- e criticamente amortecidos. Para qualquer valor de  $\omega_0\tau$ , encontramos, assim, a solução da equação diferencial homogênea (22). A tabela 1 lista as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$  para cada regime.

Regime	$\omega_0\tau$	$\exp(t/\tau)Q_x$	$\exp(t/\tau)Q_y$
Subamortecido	$> 1$	$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}$
Criticamente amortecido	1	1	t
Superamortecido	$< 1$	$\cosh\left(\frac{t}{\tau_1}\right)$	$\tau_1 \sinh\left(\frac{t}{\tau_1}\right)$

Como a tabela mostra, todas as soluções da equação diferencial homogênea decaem com tempo, em proporção a  $\exp(-t/\tau)$  ou ainda mais rápido.

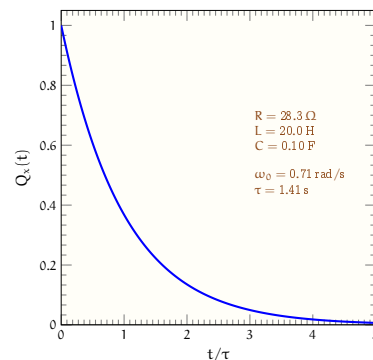


Figura 11: A função  $Q_x(t)$  definida pela Eq. (47), para o caso circuito criticamente amortecido.

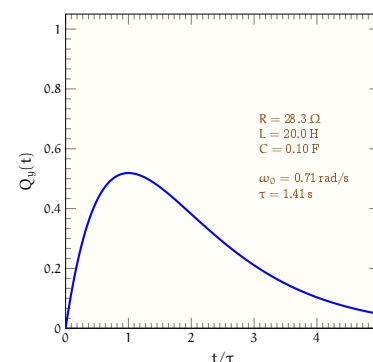


Figura 12: A função  $Q_y(t)$  definida pela Eq. (48), para o caso circuito criticamente amortecido.

Tabela 1: Soluções  $Q_x$  e  $Q_y$  da equação diferencial homogênea. Em cada regime, todas as soluções da equação homogênea são combinações lineares das funções listadas. Para abreviar, como indicado, cada função aparece multiplicada por  $\exp(t/\tau)$ , o que equivale a dividi-la pelo fator exponencial que aparece no lado direito das equações que definem as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$ .

O diagrama da figura 13, que tem a estrutura da figura 6, nos ajuda a visualizar a consequência desse decaimento. Já vimos, na Seção A EQUAÇÃO HOMOGÊNEA, que a diferença  $\Delta Q$  entre duas soluções da equação não-homogênea (6) é uma solução da equação homogênea (10). Vemos agora que as soluções da equação homogênea tendem a zero para tempos grandes. Significa que todas as soluções da equação não-homogênea tendem para uma mesma solução  $q(t)$  para tempos  $t \gg \tau$ .

A solução  $q(t)$  é, portanto, especial. Ela varia com o tempo, mas a variação é periódica e, portanto, duradoura. Para tempos grandes, enquanto a fonte de tensão fornecer a força eletromotriz  $\mathcal{E}$ , a carga no capacitor da figura 1 será dada pela função  $q(t)$ . Chamamos  $q(t)$  de *solução estacionária*. O circuito da figura 1 possui uma solução estacionária, que depende apenas de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $\mathcal{E}(t)$ .

Nosso único problema, agora, é encontrar a função  $q(t)$ . Uma vez que a encontramos, poderemos calcular a carga  $Q(t)$  que resolve a Eq. (6).

Vale a pena recapitular o procedimento. Queremos calcular a carga num circuito dado, com condições iniciais especificadas pela carga inicial  $Q(t = 0) = Q_0$  e pela corrente inicial  $I(t = 0) = I_0$ . Digamos as condições iniciais correspondam ao ponto  $Q_b$  na figura 13. Para encontrar  $Q_b$ , como a figura mostra, precisamos somar a  $q(t)$  a diferença  $\Delta Q_b$ . Esta última pode ser escrita como combinação linear das funções  $Q_x$  e  $Q_y$ , que podem ser encontradas na linha da tabela 1 correspondente ao circuito: se este for superamortecido, por exemplo, tomaremos as funções na última linha.

Teremos, então, que

$$\Delta Q_b(t) = \alpha Q_x(t) + \beta Q_y(t), \quad (49)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são duas constantes a determinar.

Se  $q(t)$  for conhecida, poderemos imediatamente escrever que

$$Q_b(t) = \alpha Q_x(t) + \beta Q_y(t) + q(t). \quad (50)$$

Com isso, o problema fica praticamente resolvido, restando apenas escolher as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  que satisfazem às condições iniciais:

$$Q_0 = \alpha Q_x(0) + \beta Q_y(0) + q(0) \quad (51)$$

e

$$I_0 = \alpha \left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_0 + \beta \left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_0 + \left. \frac{dq}{dt} \right|_0. \quad (52)$$

Temos, assim, duas equações com duas incógnitas ( $\alpha$  e  $\beta$ ). **Resolvido esse sistema**,<sup>6</sup> encontraremos as duas constantes que faltavam para

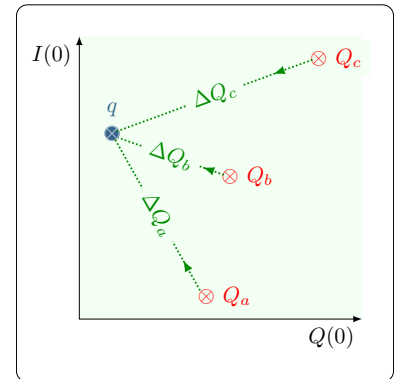


Figura 13: Evolução temporal das soluções da Eq. (6). A função  $q(t)$  para a qual todas as demais convergem, é a solução estacionária.

<sup>6</sup> Resolver o sistema é fácil, porque todas as funções  $Q_y$  na tabela 1 se anulam em  $t = 0$ . Assim, a Eq. (51), por si só, determina  $\alpha$ . Uma vez que tenhamos encontrado  $\alpha$ , a Eq. (52) determinará  $\beta$ .

completar o lado direito da Eq. (50) e determinaremos a solução  $Q_b(t)$  da equação não-homogênea. Isso resolverá nosso problema.

Falta apenas determinar a solução especial  $q(t)$ , e esse é o assunto da próxima seção.

## A SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA

Para recapitular, a solução da equação não-homogênea (6) que determina a carga que se acumula no capacitor da figura 1 depende das condições iniciais. Essa dependência, entretanto, é efêmera. Depois de algum tempo, a evolução da carga se torna independente das condições iniciais e passa a depender apenas da força eletromotriz  $\mathcal{E}(t)$  gerada pela fonte de tensão alternada.

### Regimes transiente e estacionário

Como ilustração, a figura 14 mostra a evolução temporal da carga no circuito da figura 1 para os valores indicados de  $C$ ,  $R$ ,  $L$  e  $\mathcal{E}$ . Ainda não sabemos obter esse gráfico, mas é instrutivo discuti-lo antes da hora, porque ajuda a entender o objetivo que procuramos.

Na região da direita do gráfico, para  $t > 5\tau$ , a corrente oscila regularmente, com frequência igual à frequência  $\omega$  da força eletromotriz. Nesse domínio do tempo, ela está no regime estacionário, no qual permanecerá indefinidamente.

Antes disso, o comportamento depende das condições iniciais. No exemplo da figura, com as condições iniciais indicadas, nos primeiros instantes a carga oscila com amplitude relativamente grande. À medida que o tempo corre, a amplitude diminui. Por volta de  $t = \tau$ , o padrão oscilatório se torna irregular. Mais adiante, esse padrão cede lugar à oscilação uniforme, com frequência mais alta, que define o regime estacionário.

O intervalo desde  $t = 0$  até a estabilização do regime estacionário é chamado de *transiente*. Matematicamente, durante o transiente a a solução  $\Delta Q(t)$  da equação homogênea contribui apreciavelmente para a carga  $Q(t)$ . Como  $\Delta Q(t)$  decai na escala de tempo  $\tau$ , depois de alguns intervalos  $\tau$  (depois de cinco intervalos  $\tau$ , para as condições iniciais da figura 14) a contribuição de  $\Delta Q$  se torna insignificante e a carga passa a ser descrita pela solução estacionária  $q(t)$ .

### Solução estacionária

Queremos encontrar a função  $q(t)$  que satisfaz a Eq. (6) para tempos longos. Se dividirmos os dois lados da Eq. (6) por  $L$ , poderemos introduzir o tempo de relaxação  $\tau$  e a frequência livre  $\omega_0$  definidos pelas

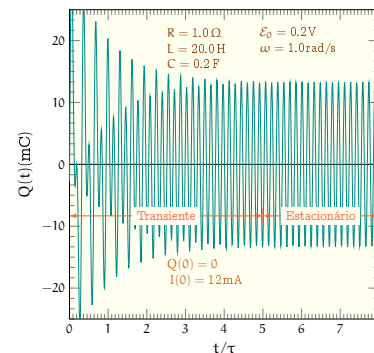


Figura 14: Carga no capacitor da figura 1 em função do tempo, para a capacitância, a resistência, a indutância e os parâmetros da fonte de tensão dados. As condições iniciais

Eqs (20) e (21) para obter a expressão

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t). \quad (53)$$

Mesmo sem a evidência apresentada na figura 14, podemos ver que  $q(t)$  deve oscilar com a frequência da força eletromotriz. Como já explicado, a solução estacionária independe das condições iniciais. Ela é determinada, unicamente, pela força eletromotriz  $\mathcal{E}(t)$ . Dado que esta é periódica, com frequência  $\omega$ , esperamos que  $q(t)$  tenha a mesma frequência. Poderíamos imaginar que  $q(t)$ , assim como  $\mathcal{E}(t)$ , deva ser proporcional a  $\cos(\omega t)$ , mas se verifica facilmente que essa hipótese é incorreta. Para isso, basta substituir  $A \cos(\omega t)$  no lugar de  $q(t)$  na Eq. (53). A derivada no segundo termo à esquerda, gera a função  $-\omega \sin(\omega t)$ , que não é proporcional a  $\cos(\omega t)$ . Significa que  $A \cos(\omega t)$  não é **solução**<sup>7</sup>.

Poderíamos procurar uma solução que fosse combinação linear de  $\cos(\omega t)$  com  $\sin(\omega t)$ . Existe, porém, uma alternativa que se mostra mais prática, como veremos.

Para encontrar  $q(t)$ , em lugar de trabalhar com a Eq. (53), iremos resolver outra equação diferencial não-homogênea:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \exp(i\omega t). \quad (54)$$

Pode parecer que essa mudança é uma complicação sem sentido. Entretanto, se tomarmos a parte real da Eq. (54), veremos imediatamente que

$$\frac{d^2 \operatorname{Re}(z)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d \operatorname{Re}(z)}{dt} + \omega_0^2 \operatorname{Re}(z) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t). \quad (55)$$

Aqui, ao escrever o lado direito, lembramos que  $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ; conseqüentemente, a parte real de  $\exp(i\omega t)$  é  $\cos(\omega t)$ .

A Eq. (55) mostra que a parte real da variável  $z$  obedece à equação diferencial não-homogênea. Se conseguirmos resolver a Eq. (54), poderemos em seguida tomar a parte real de  $z$  para encontrar uma solução da Eq. (53). Para garantir que essa solução encontrada seja a estacionária, vamos exigir que a dependência de  $z$  com o tempo seja oscilatória, com frequência  $\omega$ . Em outras palavras, vamos impor que

$$z(t) = z_0 \exp(i\omega t), \quad (56)$$

onde  $z_0$  é uma variável complexa que será ajustada para que  $z(t)$  obedeça a Eq. (54).

Enquanto a derivada da função cosseno é o seno, a derivada da exponencial é ela mesma. Por isso, já temos certeza de que o lado direito da Eq. (56) transformará a Eq. (55) numa expressão explícita

<sup>7</sup> Exceto no caso especial  $R = 0$ , no qual o termo proporcional a  $R$  desaparece

para  $z_0$ . De fato, a substituição do lado direito da Eq. (56) no lugar de  $z$  gera a igualdade

$$-\omega^2 z_0 \exp(i\omega t) + \frac{2i\omega}{\tau} z_0 \exp(i\omega t) + \omega_0^2 z_0 \exp(i\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \exp(i\omega t). \quad (57)$$

O próximo passo consiste em dividir os dois lados pelo fator comum  $\exp(i\omega t)$  e fatorar  $z_0$  no lado esquerdo. Resulta a igualdade

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau}\right) z_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}, \quad (58)$$

ou seja,

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau}} \quad (59)$$

e, portanto,

$$z(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{\exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau}}. \quad (60)$$

Achamos assim a solução desejada para a Eq. (54). Precisamos apenas encontrar a sua parte real para determinar  $q(t)$ , o que exige dividir o número complexo  $z_n = \exp(i\omega t)$ , no numerador, pelo número complexo  $z_d = \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau}$ , no denominador.

Para isso, **convém escrever os dois na forma polar**<sup>8</sup>

$$z = |z| \exp(i \arg(z)), \quad (62)$$

onde  $|z|$  é o *módulo* e  $\arg(z)$ , o *argumento* ou a *fase* de  $z$ .

O numerador  $z_n$  já está na forma polar. Resta encontrar o módulo e a fase do denominador. Uma vez que a parte real de  $z_d$  é

$$x_d = \omega_0^2 - \omega^2, \quad (63)$$

e a parte imaginária é

$$y_d = \frac{2\omega}{\tau}, \quad (64)$$

vemos da figura 15 que

$$|z_d| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}} \quad (65)$$

e

$$\phi \equiv \arg(z_d) = \arctg\left(\frac{2\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}\right). \quad (66)$$

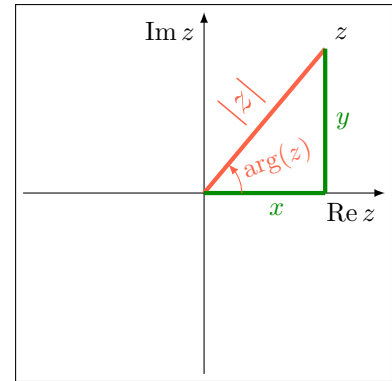


Figura 15: Módulo e fase do número complexo  $z = x + iy$ . Como tanto  $x$  como  $y$  podem ser negativos, a fase pode estar em qualquer quadrante.

<sup>8</sup> Qualquer número complexo  $z$  tem uma parte real  $x$  e outra imaginária  $y$ . Pode, portanto, ser escrito na forma *cartesiana*

$$z = x + iy. \quad (8.1)$$

A Eq. (8.1) é muito conveniente para adição ou subtração de dois números complexos. Dados  $z_1$  e  $z_2$ , temos que

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \quad (8.2)$$

Para multiplicar e dividir a forma (8.1) é menos atraente. Ela permite efetuar as duas operações, mas as expressões envolvidas são pouco práticas. Por exemplo, o produto é

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (8.3)$$

Felizmente, há uma alternativa. O número complexo pode ser escrito na forma *polar* (62).

Dados  $x$  e  $y$ , aplicamos trigonometria ao triângulo da figura 15 para obter o módulo  $|z|$  e o argumento  $\arg(z)$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8.4)$$

e

$$\arg z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (8.5)$$

Uma vez que  $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}(\alpha)$ , a Eq. (8.5) é ambígua: se  $y = x$ , por exemplo,  $\arg(z)$  tanto pode ser  $\pi/4$  rad como pode ser  $5\pi/4$  rad. Para remover a ambiguidade, o mais simples é notar que  $0 < \arg z < \pi$  quando  $y > 0$  e  $\pi < \arg z < 2\pi$  quando  $y < 0$ . Assim, se  $x = y = 2$ , a fase será  $\arg(z) = \pi/4$  rad, enquanto que, para  $x = y = -2$ , a fase será  $5\pi/4$  rad.

Da figura 15, dados  $|z|$  e  $\arg z$ , podemos encontrar as partes real e imaginária de  $z$ :

$$x = |z| \cos(\arg z) \quad (8.6)$$

$$y = |z| \text{sen}(\arg z). \quad (61)$$



Dado que a parte imaginária é sempre positiva, a fase  $\phi$  estará no primeiro quadrante se  $\omega_0 > \omega$  e no segundo se  $\omega_0 < \omega$ .

Encontrados o módulo e o argumento do denominador, podemos efetuar a divisão no lado direito da Eq. (60). Resulta que

$$z(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{\exp(i(\omega t - \phi))}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}. \quad (67)$$

Podemos, agora, tomar a parte real da Eq. (67) para encontrar a solução estacionária  $q(t) = \text{Re } z(t)$ :

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}. \quad (68)$$

Como já esperávamos,  $q(t)$  não é proporcional a  $\cos(\omega t)$ . A carga é uma função periódica do tempo, com frequência  $\omega$ , mas ela é atrasada de  $\phi/\omega$  em relação à força eletromotriz. A força eletromotriz é máxima quando  $t = 0$ ; já a carga no capacitor somente alcançará o máximo algum tempo mais tarde, quando  $t = \phi/\omega$ .

### Solução completa da equação não-homogênea

De posse da solução estacionária  $q(t)$  na Eq. (68), passamos agora a procurar pela solução da equação não-homogênea que **satisfaz às condições iniciais**.<sup>9</sup> Na prática, como já explicado na Seção , nossa tarefa é encontrar as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  que ajustam a função

$$Q(t) = \alpha Q_x(t) + \beta Q_y(t) + q(t), \quad (69)$$

onde  $Q_x$  e  $Q_y$  são as funções listadas na tabela 1, para o regime a que pertence o circuito que nos interessa, e  $q(t)$  é a solução estacionária (68).

Um exemplo concreto será suficiente para vermos como os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são encontrados.

### Ajuste da solução às condições iniciais

Como ilustração do procedimento, vamos voltar ao circuito da figura 1 com os parâmetros

$$\begin{aligned} R &= 1 \Omega \\ L &= 20 \text{ H}, \\ C &= 0.2 \text{ F}, \\ \mathcal{E}_0 &= 0.2 \text{ V}, \\ \omega &= 1 \text{ rad/s}, \end{aligned} \quad (70)$$

<sup>9</sup> Como o exemplo na figura 14 mostra, a solução estacionária é, em geral, incompatível com as condições iniciais. No instante  $t = 0$ , a carga  $q(t)$  vale

$$q(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}. \quad (9.1)$$

É também fácil determinar a corrente inicial: basta derivar a Eq. (68) em relação ao tempo para ver que

$$I(0) = -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}. \quad (9.2)$$

Os lados direitos das Eqs. (9.1) e (9.2) dependem apenas dos elementos do circuito; nada têm a ver com a carga no capacitor ou a corrente que circulava no instante em que o circuito foi fechado. A carga e a corrente iniciais podem, por exemplo, ser iguais a zero, o que é incompatível com as Eqs. (9.1) e (9.2). Ou podem ter dois outros valores  $Q(0)$  e  $I(0)$  quaisquer; a não ser no caso excepcional em que  $Q(0)$  coincide com o valor numérico do lado direito da Eq. (9.1) e  $I(0)$  coincide com o da Eq. (9.2), a carga  $Q(t)$  terá um comportamento transiente antes de entrar no regime estacionário, como ilustrado pela função na figura 14.

iguais aos que aparecem na figura 14.

Aqui, porém, vamos trabalhar com condições iniciais **diferentes**:<sup>10</sup>

$$Q(0) = I(0) = 0. \quad (71)$$

Podemos esperar um comportamento distinto do que é mostrado na figura 14. A solução estacionária, claro, será a mesma.

Para encontrar os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , antes de mais nada precisamos encontrar o regime a que pertence o circuito. Calculamos, portanto, o tempo de relaxação  $\tau$  e a frequência livre  $\omega_0$ :

$$\tau \equiv 2LR = 40 \text{ s} \quad (72)$$

e

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0.5 \text{ rad/s}. \quad (73)$$

Podemos ver que  $\omega_0 \tau = 20$ , o que significa que o circuito é subamortecido. Não surpreende, visto que o transiente na figura 14 é oscilatório. Aqui, também, esperamos ver oscilações durante o transiente. Se o circuito fosse superamortecido, o transiente decairia exponencialmente sem oscilar.

Dado que o circuito é subamortecido, as funções  $Q_x$  e  $Q_y$  que nos interessam são as da primeira linha na tabela 1, ou seja, as dadas pelas Eqs. (36) e (38), **onde**<sup>11</sup>

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} = 0.50 \text{ rad/s}. \quad (74)$$

Conhecidas as duas funções de base, podemos agora calcular os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ . Para encontrar o primeiro, basta impor a condição  $Q(0) = 0$  na Eq. (69). Uma vez que  $Q_x(0) = 1$  e  $Q_y(0) = 0$ , no instante inicial a Eq. (69) assume a forma que

$$0 = \alpha + q(0). \quad (75)$$

O valor inicial de  $q(0)$  é dado pela Eq. (9.1). Substituídos os parâmetros do circuito, encontramos que

$$q(0) = -13.3 \text{ mC} \quad (76)$$

e, da Eq. (75), que

$$\alpha = 13.3 \text{ mC}. \quad (77)$$

Para encontrar  $\beta$ , precisamos derivar a Eq. (69) em relação ao tempo e, em seguida, fazer  $t = 0$ . Isso mostra que

$$I(0) = \alpha \left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_{t=0} + \beta \left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0}. \quad (78)$$

<sup>10</sup> A carga inicial na figura 14 também é zero, mas como a corrente inicial é diferente de zero, as condições iniciais são distintas e, como veremos a seguir, o transiente é bem diferente.

<sup>11</sup> Como  $\omega_0 \tau$  é grande, a frequência  $\omega_1$  é praticamente igual a  $\omega_0$ , tão próxima de  $\omega_0$  que precisaríamos de mais casas decimais para distinguir a diferença.

O lado esquerdo da Eq. (78) é zero (condição inicial). Para encontrar o primeiro termo no lado direito, derivamos a Eq. (36) em relação ao tempo, para ver que

$$\left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}. \quad (79)$$

A função  $Q_y$  é definida de forma que

$$\left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_{t=0} = 1. \quad (80)$$

E, finalmente, o lado direito da Eq. (9.2) nos dá o último termo da Eq. (78)::

$$\frac{dq}{dt} = -0.88 \text{ mA}. \quad (81)$$

Tudo considerado, temos que

$$0 = -\frac{\alpha}{\tau} + \beta - 0.88 \text{ mA}, \quad (82)$$

ou seja, que

$$\beta = \frac{13.3 \times 10^{-3}}{40} + 0.88 \times 10^{-3} = 1.21 \text{ mA}. \quad (83)$$

A carga no capacitor, em mC, é, portanto,

$$Q(t) = \exp(-t/40) \left( 1.33 \cos(0.5t) + 2.42 \sin(0.5t) \right) + q(t), \quad (84)$$

onde a função  $q(t)$  é dada pela Eq. (68), que se reduz à expressão

$$q(t) = 13.3 \cos(t - 3.1) \text{ mA}. \quad (85)$$

Aqui, a unidade de tempo é segundo e o do argumento do cosseno, radiano.

Vemos aqui, como na figura 14, comportamentos distintos para tempos curtos ( $t < 5\tau$ ) e tempos longos. Na etapa transiente, os dois primeiros termos no lado direito da Eq. (84) dão contribuição para a carga. Entretanto, como o fator  $\exp(-t/\tau)$  multiplica tanto a função  $Q_x$  como a  $Q_y$ , os dois primeiros termos se tornam **insignificantes para  $t > 5\tau$** .<sup>12</sup>

A figura 16 foi desenhada na escala temporal de  $\tau$ , para exibir a transição entre os regimes transiente e estacionário. Para mostrar as oscilações, a figura 17 mostra o começo do transiente na escala do período das oscilações da força eletromotriz. Nela, podemos comprovar que a carga e a corrente se anulam em  $t = 0$ . O perfil dentado das oscilações se deve à interferência entre as funções  $Q_x(t)$  e  $Q_y(t)$ , que têm frequência  $\omega_1$  e decaem exponencialmente, aos poucos, e a função  $q(t)$ , que tem frequência  $\omega$  e amplitude constante. Com o correr do tempo, as primeiras desaparecem e a carga passa a ser a função harmônica do tempo que emerge na metade direita da figura 16.

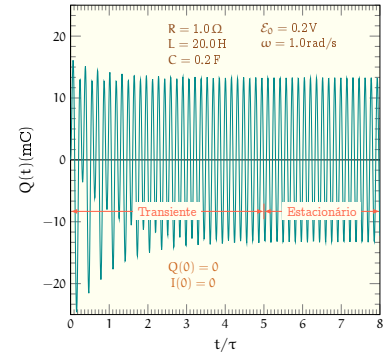


Figura 16: Carga em função do tempo, dada pela Eq. (84). Os parâmetros do circuito são os mesmos que aparecem na figura 14, mas a corrente inicial é nula.

<sup>12</sup> Para  $t = 5\tau$ , o fator  $\exp(-t/\tau)$  vale  $6.7 \times 10^{-3}$ , menor do que 1%. A menos que um dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  seja muito grande em comparação com a amplitude da solução estacionária, é boa aproximação desconsiderar a contribuição da solução da equação homogênea.

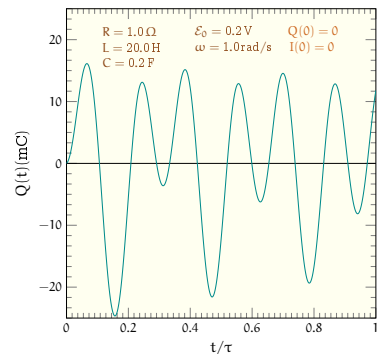


Figura 17: Ampliação da região  $t < \tau$  da figura 16.

### Impedância

Quando há interesse no comportamento inicial da carga ou na corrente, o procedimento descrito na Seção é indispensável. Frequentemente, porém, o tempo de relaxação  $\tau$  é curto em comparação com o tempo em que é realizada uma medida. O foco do estudo é, então, a corrente estacionária. Esta última pode ser encontrada de forma mais simples, como veremos a seguir.

Na base do novo método está a Eq. (57), que determinou a função complexa  $z(t)$ , cuja parte real é a carga. Uma vez que estamos mais interessados na corrente, em lugar de calcular  $z(t)$ , tomar sua parte real e derivar em relação ao tempo para encontrar  $I(t)$ , vamos trabalhar com a função complexa

$$u(t) \equiv \frac{dz}{dt}, \quad (86)$$

cuja parte real é a corrente:

$$I(t) = \text{Re } u(t). \quad (87)$$

Da expressão  $z = z_0 \exp(i\omega t)$ , segue imediatamente que

$$u(t) = i\omega z(t), \quad (88)$$

ou seja

$$z = \frac{u}{i\omega}. \quad (89)$$

Podemos agora substituir o lado direito da Eq. (89) no lugar de  $z_0 \exp(i\omega t)$ , na Eq. (57). Resulta que

$$i\omega u + \frac{2}{\tau}u + \frac{\omega_0^2 u}{i\omega} = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (90)$$

Multiplicamos agora os dois lados da Eq. (90) e recordamos as definições  $\tau \equiv 2L/R$  e  $\omega_0^2 \equiv 1/(LC)$ , para ver que

$$i\omega Lu + Ru + \frac{u}{i\omega C} = \mathcal{E}. \quad (91)$$

No lado direito da Eq. (91), podemos fatorar a função  $u$ , para obter o resultado

$$(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C})u = \mathcal{E}, \quad (92)$$

que pode ser visto como generalização da lei de Ohm,  $\Delta V = RI$ .

A generalização estende a lei de Ohm de duas maneiras. Em primeiro lugar, ela leva a relação  $\Delta V = RI$  do eixo real para o plano complexo. Em segundo, ela define grandezas análogas à resistência

para os dois elementos *reativos* do circuito, o capacitor e o indutor. Mais formalmente, definimos a *impedância* dos elementos resistivo e reativos do circuito pelas igualdades

$$Z_R = R, \quad (93)$$

para o resistor,

$$Z_L = i\omega L, \quad (94)$$

para o indutor e

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad (95)$$

para o capacitor.

Como veremos mais adiante, o fature  $i$  no lado direito da Eq. (94) e  $1/i$  no da Eq. (95), que tornam imaginárias as impedâncias do indutor e do capacitor, têm uma interpretação física. Eles indicam que os elementos reativos tendem a deslocar a fase da corrente em relação à da força eletromotriz  $\mathcal{E}(t)$ . Especificamente, se  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , a corrente será proporcional a  $\cos(\omega t - \varphi)$ ; na ausência de elementos reativos, a fase  $\varphi$  é nula. O indutor tende a fazer  $\varphi$  se aproximar de  $\pi/2$ , que é a fase do número complexo  $i$ , enquanto o capacitor tende a fazer  $\varphi$  se aproximar de  $-\pi/2$ , que é a fase do número  $1/i$ .

Para explorar o conceito de impedância, aplicamos a lei das malhas, de Kirchoff, ao circuito da figura 1. Para isso, seguindo o tratamento tradicional, como indica a figura 18, escolhemos um sentido para a corrente. Em seguida, percorremos o circuito, por exemplo, no sentido  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Ao atravessar um elemento com impedância  $Z$ , contabilizamos perda complexa de potencial  $-Zu$ , negativa porque estamos avançando no sentido da corrente. Ao atravessar a fonte de tensão, do polo negativo para o positivo, contabilizamos ganho  $\mathcal{E}_0 \exp(i\omega t)$ . Assim, ao voltar ao ponto de partida, a soma das perdas e ganho complexos nos conduz ao resultado

$$-(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C})u + \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t) = 0, \quad (96)$$

que concorda com a Eq. (92).

O mesmo raciocínio pode ser aplicados a circuitos mais elaborados, com mais elementos e malhas. A única restrição é a dependência temporal das forças eletromotrizs: na hipótese de haver mais de uma fonte de tensão, o conceito de impedância somente faz sentido se todas elas tiverem a **mesma frequência**.<sup>13</sup>

### Ressonância

O circuito simples na figura 18 serve como ilustração de um dos aspectos mais importantes da física das oscilações: a emergência de uma

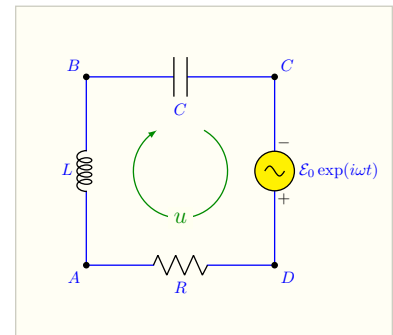


Figura 18: Atribuição de sentido à corrente no circuito da figura 1.

<sup>13</sup> As forças eletromotrizs podem ter amplitudes e fases distintas, desde que tenham a mesma frequência.

ressonância, quando a frequência  $\omega$  do gerador se aproxima da frequência livre  $\omega_0$  do circuito. A álgebra que põe em evidência a ressonância pode começar na Eq. (96).

A partir dela, podemos imediatamente encontrar a corrente complexa:

$$u(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \exp(i\omega t)}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}, \quad (97)$$

que é, como podemos ver, a razão entre dois números complexos: a força eletromotriz complexa  $\mathcal{E}$  e a impedância do circuito

$$Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}). \quad (98)$$

Para efetuar a divisão, precisamos do numerador e do denominador em forma polar. O numerador já está nessa forma. A figura 19 nos ajuda a determinar o módulo  $|Z|$  e a fase  $\varphi$  da impedância. Pitágoras nos diz que

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad (99)$$

e a trigonometria, que

$$\varphi = \text{arctg} \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (100)$$

Como podemos ver, tanto o módulo como a fase de  $Z$  dependem da frequência. Para frequências muito altas, a parte imaginária da impedância é, aproximadamente,  $\omega L$ . Nesse limite,  $|Z|$  se torna muito grande e  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .

Quando, ao contrário, a frequência tende a zero,  $Z$  se aproxima da impedância do capacitor. O módulo novamente cresce, mas a fase se aproxima de  $-\pi/2$ .

Entre os dois extremos há uma faixa de frequências em que  $R \gg |\omega L - 1/(\omega C)|$ . Essa região, em que a impedância é aproximadamente igual a  $R$ , ou seja, em que  $|Z| \approx R$  e  $\varphi \approx 0$ , define a ressonância.

Para ver como a corrente se comporta na ressonância, efetuamos a divisão no lado direito da Eq. (97):

$$u(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \exp(i(\omega t - \varphi)) \quad (101)$$

e projetamos no eixo real para encontrar a corrente:

$$I(t) = \text{Re } u(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi). \quad (102)$$

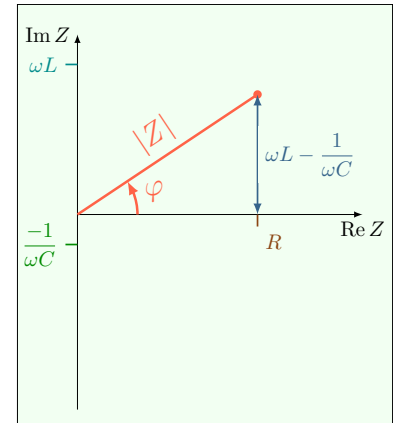


Figura 19: Representação da Eq. (98) no plano complexo.

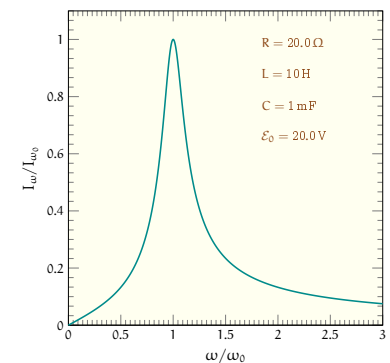


Figura 20: Amplitude  $I_\omega$  da corrente em função da frequência. A amplitude é o fator que multiplica a função cosseno na Eq. (102)

A corrente, como podemos ver, oscila com amplitude  $\mathcal{E}_0/|Z|$  e frequência  $\omega$ . A amplitude é máxima quando a parte imaginária de  $Z$  se anula, ou seja, quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (103)$$

A igualdade (103) ocorre na frequência

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (104)$$

Para  $\omega = \omega_0$ , a amplitude da corrente é  $\mathcal{E}/R$ . A figura 20 mostra a amplitude, dividida pelo máximo, em função da frequência, dividida por  $\omega_0$ . A amplitude é nula para  $\omega = 0$ , passa pelo máximo em  $\omega = \omega_0$  e decai à medida que  $\omega \rightarrow \infty$ .

Há portanto três comportamentos. Para  $\omega \ll \omega_0$ , o termo dominante no lado direito da Eq. (98) é a impedância do capacitor, que é inversamente proporcional a  $\omega$ . Para interpretar fisicamente o comportamento a baixas frequências, podemos portanto deixar de lado o resistor e o indutor. No limite  $\omega \rightarrow 0$ , a fonte de tensão equivale a uma bateria, que fornece força eletromotriz constante. Nessas condições, a bateria carrega o capacitor até que a diferença de potencial nele seja igual à tensão fornecida pela fonte; o circuito entra então no regime estacionário e a corrente vai a zero. Essa conclusão concorda com o a tendência do gráfico da figura 20 no canto inferior esquerdo.

Na região da ressonância, com  $\omega \approx \omega_0$ , os termos imaginários no lado direito da Eq. (98) se cancelam, aproximadamente, e como já discutido, a impedância  $Z$  se aproxima de  $R$ . Para interpretar o comportamento da corrente, podemos imaginar que o resistor foi ligado diretamente entre os polos da fonte de tensão. Nessa aproximação, a corrente é  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)/R$ . Esse resultado concorda com a Eq. (102), pois a fase  $\varphi$  se anula para  $\omega = \omega_0$ , como mostra a Eq. (100). E concorda também com a conclusão de que a amplitude máxima da corrente é  $\mathcal{E}_0/R$ .

Na região  $\omega \gg \omega_0$ , o lado direito da Eq. (98) é dominado pela impedância  $i\omega L$  do indutor. Dito de outra forma, a corrente é determinada pela indutância  $L$ . Para altas frequências da força eletromotriz, a impedância  $Z_L$  se torna muito grande, porque a lei de Lenz faz com que o indutor se oponha a variações rápidas da corrente. Isso explica por que a amplitude da corrente se torna pequena na região direita da figura 20.

A figura 21 mostra a fase  $\varphi$  da impedância  $Z$  em função da frequência da força eletromotriz. Na região de baixas frequências,  $\omega \ll \omega_0$ , como já vimos, a impedância se aproxima da impedância  $Z_C = 1/(i\omega C)$ , do capacitor. A figura 19 mostra que, nessas condições, a fase fica perto de  $-\pi/2$ , em acordo com o limite  $\omega \rightarrow 0$  do gráfico

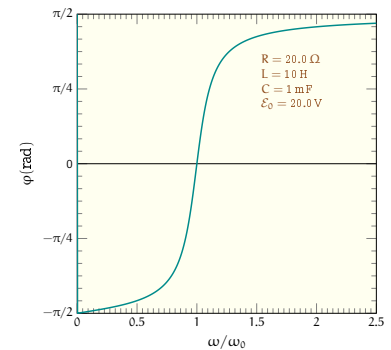


Figura 21: Fase da impedância na Eq. (98) em função da frequência da força eletromotriz.

na figura 21. Na região da ressonância,  $\omega \approx \omega_0$ , a impedância  $Z$  se aproxima da impedância  $Z_R$ , que é real. Assim, a fase  $\varphi$  fica perto de zero, como podemos ver na figura 21.

Finalmente, na região de alta frequências, com  $\omega \gg \omega_0$ , a impedância  $Z$  é praticamente igual a  $Z_L$  e a fase  $\varphi$  na figura 19 se aproxima de  $\pi/2$ . Consistentemente, na figura 21, quando  $\omega$  cresce e atravessa a ressonância, isto é, quando passa de  $\omega < \omega_0$  para  $\omega > \omega_0$ , a fase cresce rapidamente, torna-se positiva e logo se aproxima de  $\pi/2$  rad.

### Potência média

Para discutir fisicamente a ressonância, é instrutivo calcular a potência média fornecida pela fonte de tensão. Quando uma carga  $\Delta q$  percorre o circuito, desde o polo positivo até o polo negativo da fonte, a energia fornecida a ela pelo gerador é o produto da diferença de potencial pela carga:  $\mathcal{E}\Delta q$ . A potência, igual à energia dividida pelo intervalo de tempo é, portanto,

$$P(t) = \mathcal{E} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \mathcal{E}(t)I(t). \quad (105)$$

A combinação da Eq. (102) com a expressão  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  para a força eletromotriz da fonte de tensão conduz, então, à seguinte expressão para a potência

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi). \quad (106)$$

Essa igualdade é pouco conveniente, porque é o produto das duas funções trigonométricas gera uma dependência temporal que depende da fase  $\varphi$  e é pouco atraente para interpretação. Por isso, é mais conveniente **expandir**<sup>14</sup> o segundo cosseno no lado direito. Resulta que

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|} \left( \cos(\varphi) \cos^2(\omega t) + \text{sen}(\varphi) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right). \quad (107)$$

É possível simplificar ainda mais o lado direito. Para isso, recorremos à figura 19, para ver que

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{|Z|} \quad (108)$$

e

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{|Z|}. \quad (109)$$

Podemos agora substituir o lado direito da Eq. (108) no lugar de  $\cos(\varphi)$  na Eq. (107) e o lado direito da Eq. (109) no lugar de  $\text{sen}(\varphi)$ . A

<sup>14</sup> Empregamos a identidade trigonométrica  $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$ .



expressão da potência passa a ser

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|^2} \left( R \cos^2(\omega t) + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right), \quad (110)$$

onde também aproveitamos a identidade  $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$  para trocar  $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$  por  $\sin(2\omega t)/2$ .

Os dois termos dentro dos parênteses mais externos no lado direito da Eq. (110) variam com o tempo. O primeiro, proporcional ao quadrado de um cosseno, nunca é negativo. Em média, portanto, ele tem valor positivo. Já a função seno no segundo termo tem média zero. Assim, a potência média  $\langle P \rangle$  depende apenas do primeiro termo. Calculado ao longo de um número inteiro de períodos, o valor médio de  $\cos^2(\omega t)$  é  $1/2$ . Assim, a potência média é dada por uma igualdade relativamente simples:

$$\langle P \rangle = \frac{R}{2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|^2}. \quad (111)$$

A figura 22 mostra a potência média no circuito da figura 1 para os valores de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $\mathcal{E}(t)$  nas figuras 20 e 21. Assim como a amplitude da corrente, a potência média passa por um máximo na ressonância e tende a zero para frequências muito maiores ou muito menores do que  $\omega_0$ . A *largura* da ressonância é definida como a separação entre as duas frequências em que a potência média é igual à metade da potência média máxima. Como a figura mostra, a largura é *igual*<sup>15</sup> a  $2/\tau$ .

Fisicamente, a ressonância reflete a competição entre as três escalas de *frequência*<sup>16</sup> no circuito. Uma delas é dada pela frequência  $\omega$  da força eletromotriz. A segunda, pela frequência livre  $\omega_0$  do par  $LC$  no circuito. A terceira é taxa de relaxação  $1/\tau$ , que é proporcional à resistência e define a largura da curva na figura 22.

### Resistência nula

Já sabemos que todo circuito tem resistência. Para entender a física do circuito, entretando, vale a pena considerar o limite ideal em que  $R = 0$ . Nesse limite, a taxa de relaxação é zero e a dinâmica se torna mais simples.

A fonte fornece tensão para o circuito, com frequência  $\omega$ , e gera uma corrente. A frequência natural de oscilação do circuito é  $\omega_0$ . Se as duas frequências forem diferentes, a corrente é defasada da força eletromotriz. Para uma frequência  $\omega$  menor do que  $\omega_0$ , a impedância do capacitor é maior do que a do indutor, e a carga no capacitor acompanha a força eletromotriz. Significa que a carga é proporcional  $\cos(\omega t)$ . A corrente, que é a derivada da carga, é proporcional a  $\sin(\omega t)$  e está, portanto,  $\pi/2$  rad fora de fase em relação à força eletromotriz.

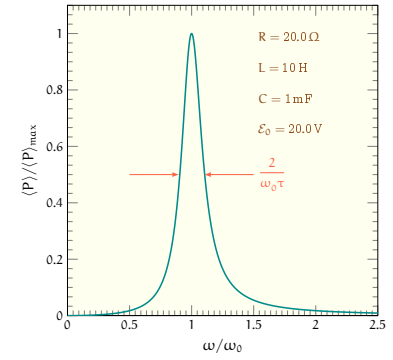


Figura 22: Potência média fornecida pela fonte de tensão em função da frequência da força eletromotriz. As setas horizontais vermelhas mostram a largura  $2/\tau$  da ressonância.

<sup>15</sup> Na figura, a frequência é medida em unidade de  $\omega_0$ ; por isso, a largura aparece como  $2/(\omega_0\tau)$ .

<sup>16</sup> Alternativamente, poderíamos pensar nas escalas de tempo, que são os períodos  $2\pi/\omega$  e  $2\pi/\omega_0$ , e o tempo de relaxação  $\tau$ , mas é mais fácil examinar as frequências.

Vejamos o que ocorre, nessas condições, num ciclo da força eletromotriz. Metade do tempo, a corrente e a força eletromotriz têm o mesmo sinal. Isso quer dizer que a corrente circula na mão de trânsito da força eletromotriz, e a fonte fornece energia para o circuito. Na outra metade do tempo, a corrente circula na contramão da força eletromotriz, e o circuito devolve para o gerador toda a energia que ganhou. O resultado é que o gerador, em média, não consegue transferir energia para o circuito. A potência média é nula. Uma forma alternativa de entender essa conclusão é lembrar que o capacitor pode armazenar, temporariamente, a energia, mas não pode dissipá-la. Assim, ao final de um ciclo, ele terá devolvido tudo o que recebeu.

Se a frequência  $\omega$  for maior do que  $\omega_0$ , a impedância do indutor será maior que a do capacitor. Nesse caso a diferença de potencial no indutor acompanhará a força eletromotriz. Assim,  $dI/dt$  será proporcional a  $\cos(\omega t)$ , e a corrente será novamente proporcional a  $\sin(\omega t)$ . Nesse caso, a potência média será, também, nula. Assim como o capacitor, o indutor pode apenas armazenar, temporariamente, a energia.

O comportamento muda radicalmente quando a frequência  $\omega$  coincide com  $\omega_0$ . Nesse caso, a impedância do capacitor anula a do indutor. A força eletromotriz está então sempre em fase com a corrente, a fonte de tensão transfere continuamente energia para o circuito e a amplitude da corrente é constantemente amplificada. No limite de tempos grandes, a amplitude tende a infinito. A potência média tende a infinito. É bom lembrar que esse resultado não é físico; ele decorre de nossa hipótese idealizada, de que a resistência é nula.

Em suma, para  $R = 0$  a potência média é nula quando  $\omega \neq \omega_0$  e infinita quando  $\omega = \omega_0$ . Se pudéssemos construir um circuito com  $R = 0$  veríamos uma ressonância extrema, na qual o pico da figura 22 se reduziria a uma linha vertical, infinita, na frequência  $\omega_0$ .

### *Resistência não-nula.*

Acabamos de ver que, no modelo idealizado  $R = 0$ , o circuito se comporta como capacitor para  $\omega < \omega_0$  e como indutor para  $\omega > \omega_0$ . Há, portanto, uma descontinuidade em  $\omega = \omega_0$ . Na vida real, não há descontinuidade, porque a resistência  $R$  suaviza a transição entre o comportamento capacitivo e o comportamento indutivo.

A resistência traz de volta a taxa de relaxação  $1/\tau \equiv R/2L$ . O circuito, então, passa a ter três comportamentos, dependendo da frequência  $\omega$ . Se a diferença  $|\omega - \omega_0|$  for grande em comparação com  $1/\tau$ , o circuito voltará a se comportar como na Seção : como um capacitor se  $\omega$  for menor do que  $\omega_0$  e como um indutor se  $\omega$  for maior do que  $\omega_0$ .

Na região intermediária, com  $\omega$  próxima de  $\omega_0$ , de forma que  $|\omega - \omega_0|$  seja pequeno em comparação com  $1/\tau$ , o circuito se comporta

como um resistor, porque a impedância do circuito é aproximadamente igual a  $R$ . Agora, a corrente fica aproximadamente em fase com a força eletromotriz. Num ciclo da força eletromotriz, a corrente passa a maior parte do tempo na mão da tensão, e o gerador consegue transferir energia para o circuito. Essa energia é dissipada no resistor, que se aquece.

Os três comportamentos podem ser identificados na figura 22. Na região esquerda do gráfico, em que a potência é pequena, o circuito tem comportamento capacitivo. A fase  $\varphi$  é aproximadamente  $-\pi/2$ , como já vimos ao discutir a figura 21. Na região direita, em que a potência volta a ser pequena, o circuito tem comportamento indutivo e a fase da impedância se aproxima de  $\pi/2$ . Na região da ressonância, delimitada pelas **setas horizontais vermelhas**, o comportamento é resistivo, e como a impedância é relativamente pequena, a potência dissipada é grande.

Concluimos aqui nossa discussão dos circuitos de corrente alternada. O próximo capítulo trata das Equações de Maxwell.