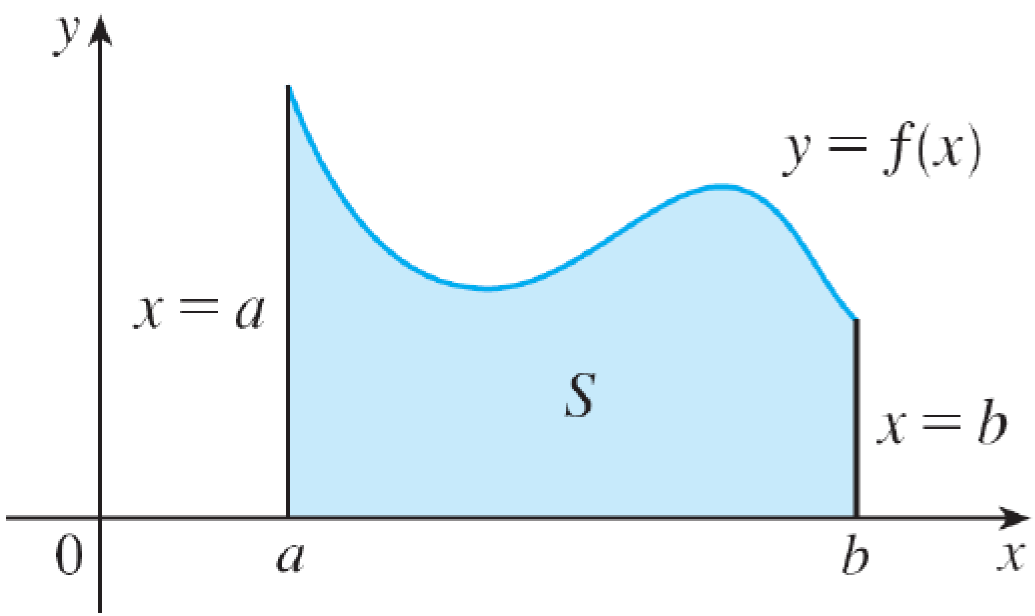
APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

ÁREA E DISTÂNCIA,TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

DISCIPLINA: CÁLCULO II (LOB1004)

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

Neste tópico será abordado o problema da área. Para encontrar a área da região S que está sob a curva y = f (x) de a a b, significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde f (x)≥0], pelas retas verticais x = a e x = b e pelo eixo x.



$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Figura 1

Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

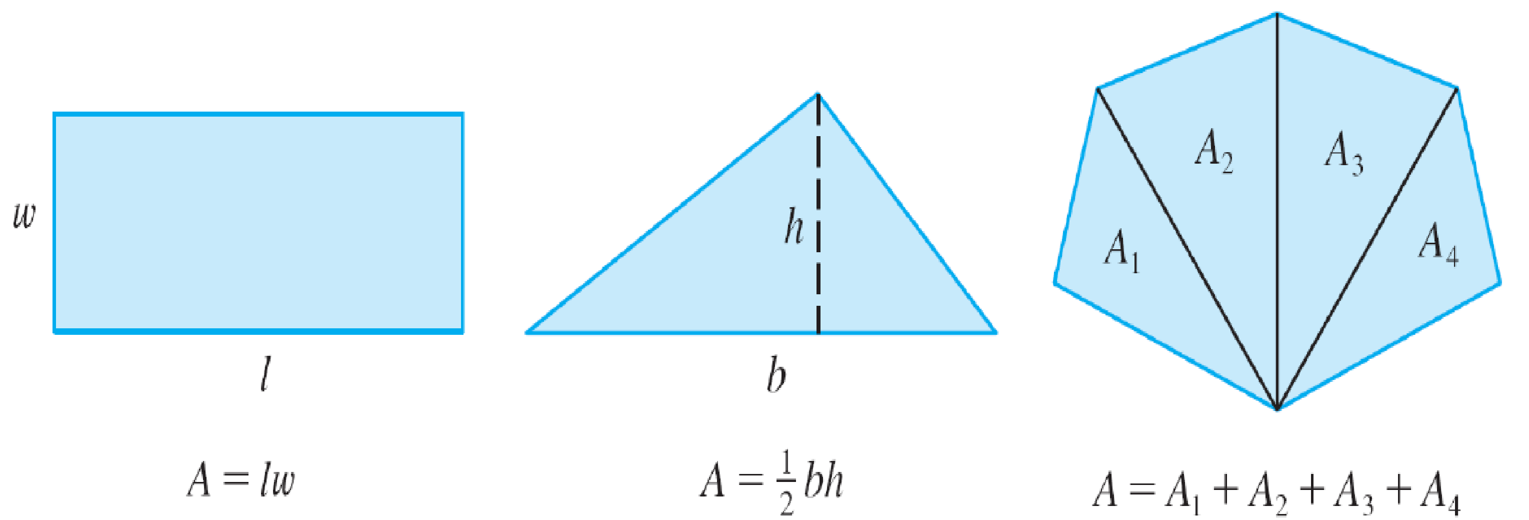


Figura 2

Será considerado retângulos para estimar a área sob a parábola y = x^2 de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

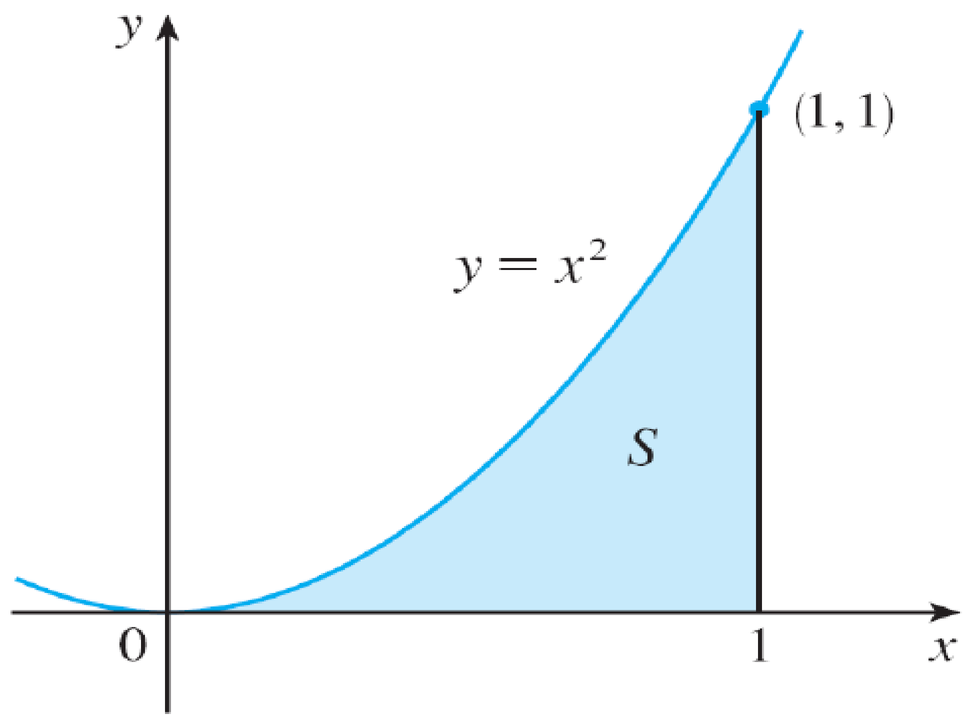


Figura 3

Observa-se que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S1, S2, S3, e S4, traçando as retas verticais x=¼ , x=½ e x=¾, como na Figura 4(a).

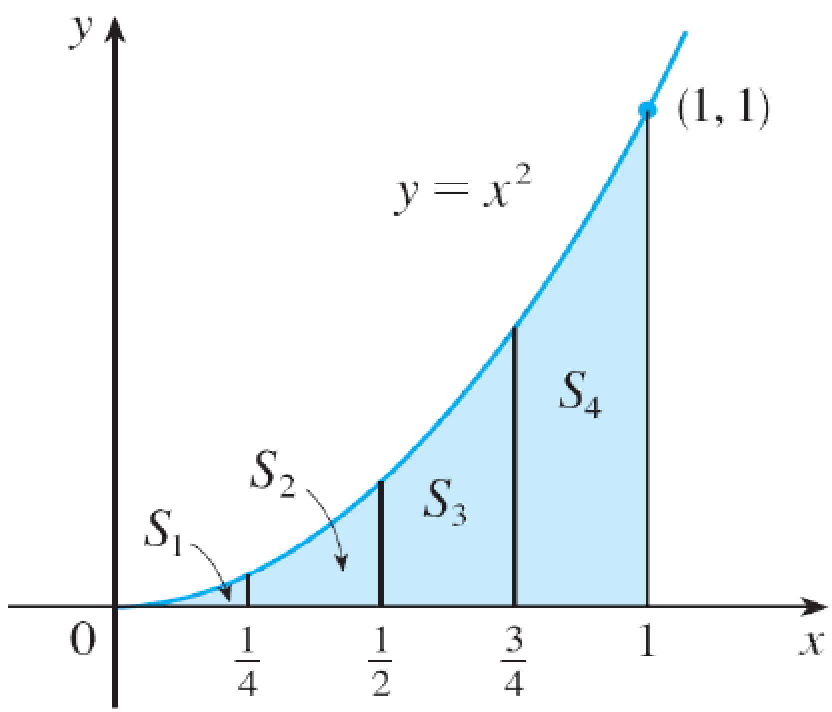


Figura 4(a)

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [conforme Figura 4(b)].Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função *f (x)*= x^2 *nas extremidades direitas dos subintervalos* $\left[0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4},1\right]$

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e a altura $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$, e 1^2.

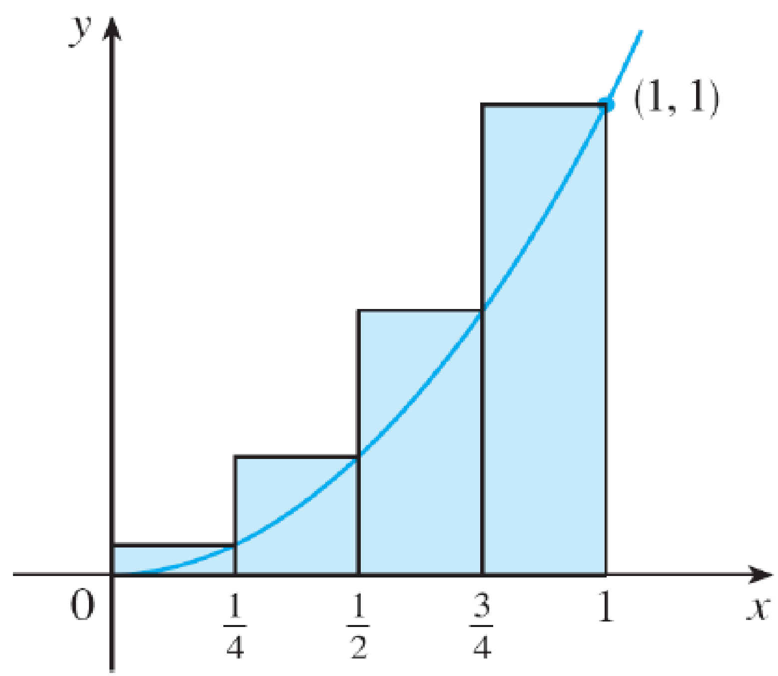


Figura 4(b)

Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875.$$

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de *f* nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

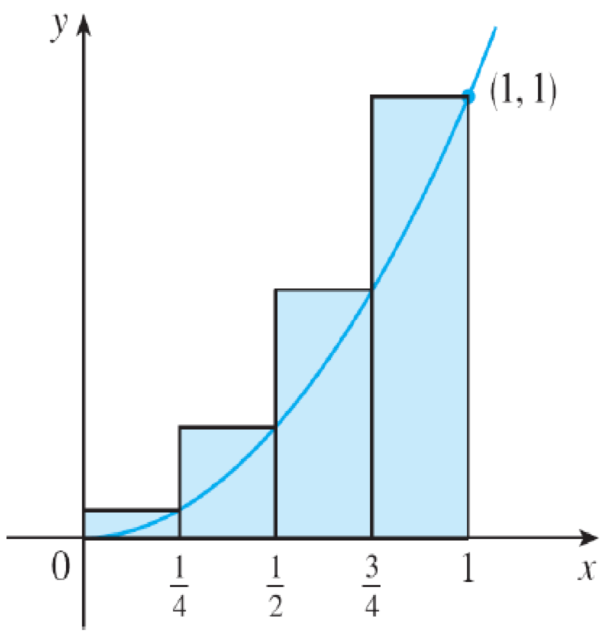


Figura 4(b)

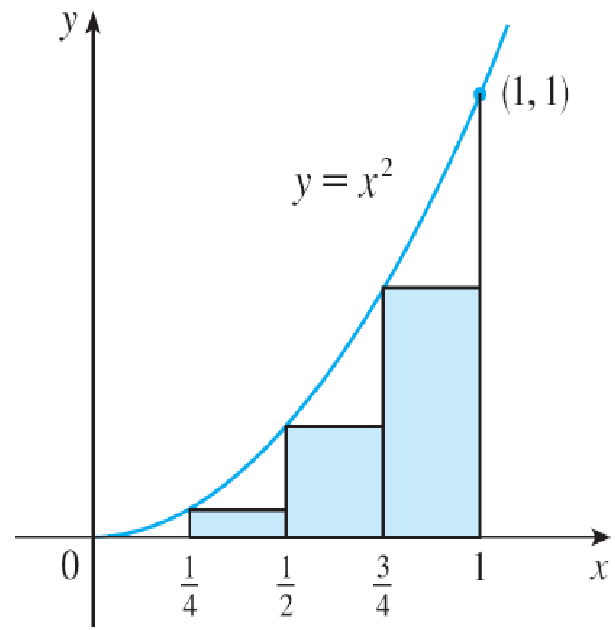


Figura 5

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

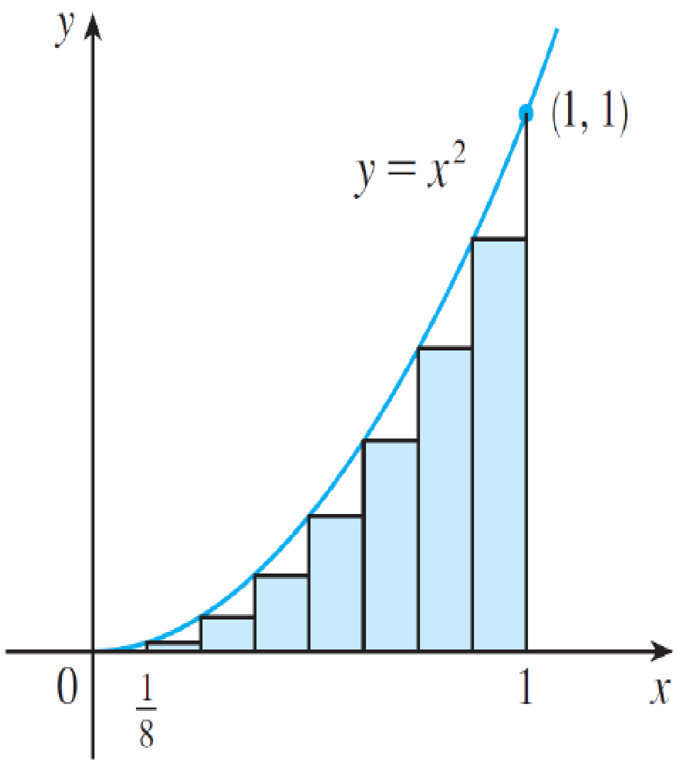
$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que a área de *S* é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para *A*:

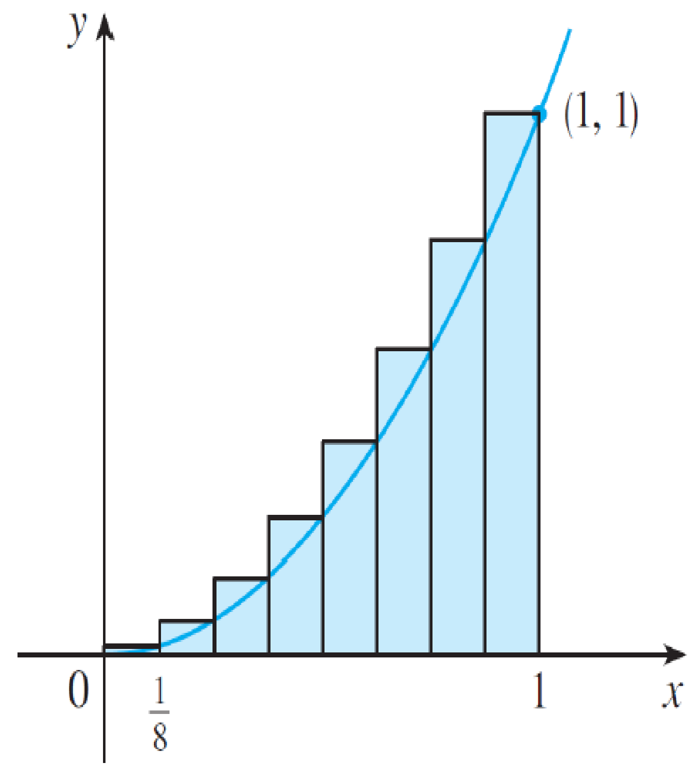
$$0{,}21875 < A < 0{,}46875.$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas.

Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

Aproximando *S* por 8 retângulos

Figura 6

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas.

A tabela apresenta os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (Ln) ou com as extremidades direitas (Rn). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: A ≈ 0,3333335.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

A integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.
Se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma <u>soma de áreas de retângulos aproximantes</u>.

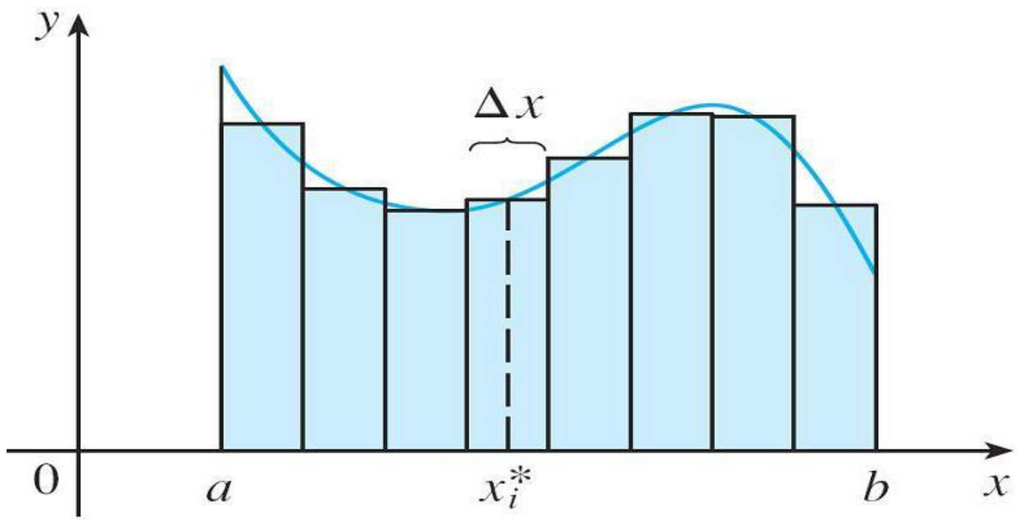


Figura 7- f (x) $\geq$ 0, a soma de Riemann será Σf (xi*) Δx

A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva y = f (x) de a até b.

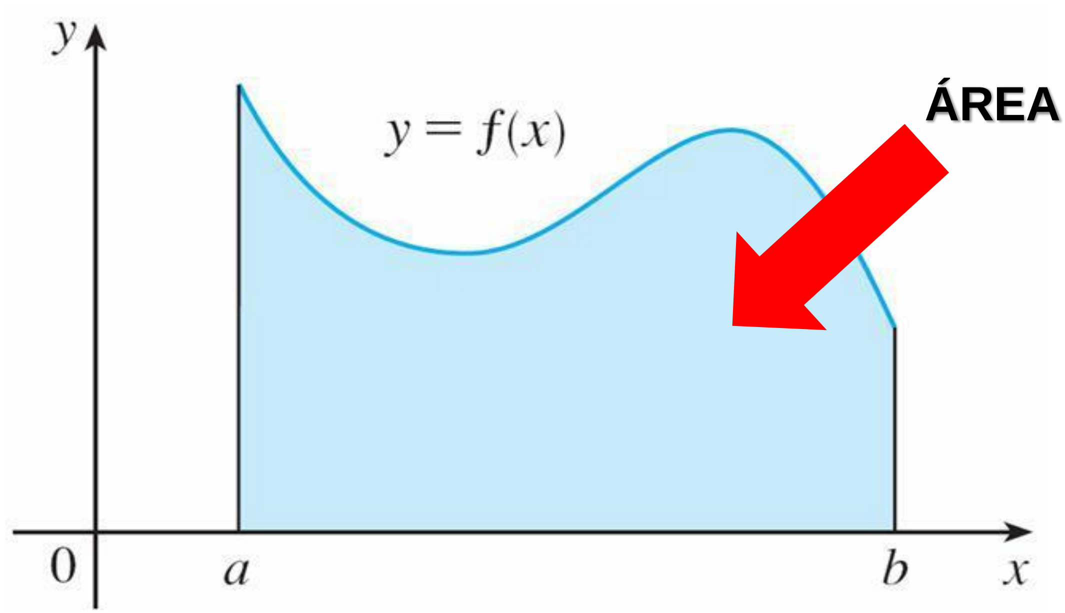


Figura 8- Área sob a curva

Portanto, vamos definir a área *A* da região *S* da seguinte forma.

2 **Definição** A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x].$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que *f* seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos aproximantes:

3
$$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x].$$

Se f assumir valores positivos e negativos, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do oposto das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (as áreas dos retângulos azuis menos as áreas dos retângulos amarelos).

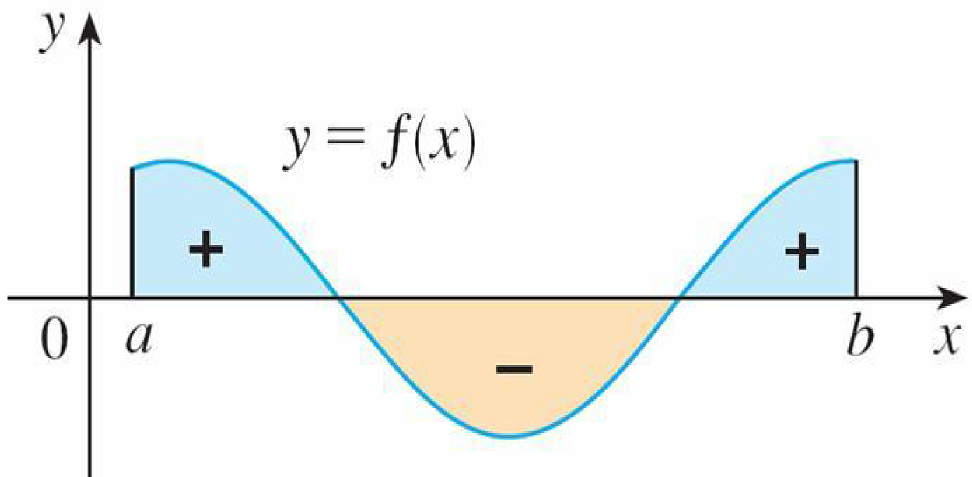


Figura 9- $\int_a^b f(x)dx$ correspondente a área, $\mathrm{A1} - \mathrm{A2}$

INTEGRAL DEFINIDA – TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

<u>Definição</u> : A área da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots. + f(x_n)\Delta_n \right]$$

Quando $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$ **<u>existe e é finito</u>, será denominado de integral definida da função f no intervalo [a, b], sendo denotado por**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$