UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

2ª Lista de Exercícios - Controlabilidade e Observabilidade

1. Considere o circuito da figura 1.

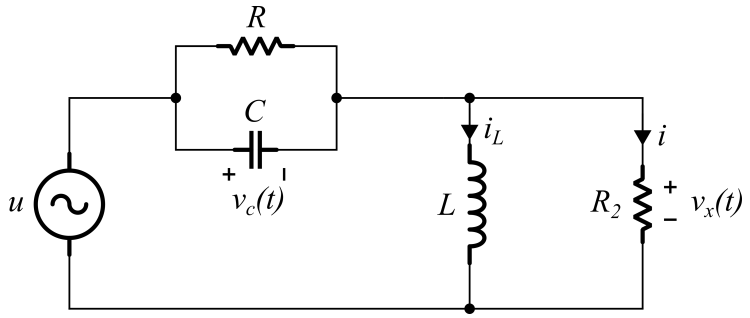

Figura 1: Circuito RLC

(a) Obtenha uma representação no espaço de estados considerando como variáveis de estado a tensão no capacitor e a corrente no indutor.

(b) Determine as condições nas quais o sistema deixa de ser controlável e observável.

(c) Obtenha a função de transferência de u para v_x. O que podemos dizer a respeito da controlabilidade a partir da mesma?

2. Considere o circuito em ponte da figura 2.

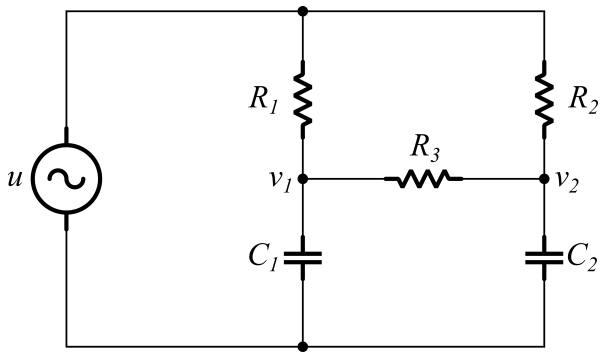

Figura 2: Circuito em ponte

(a) Considerando como variáveis de estado v_1 e v_2, determine um modelo no espaço de estados para o circuito.

(b) Determine a controlabilidade do circuito quando temos uma ponte equilibrada, ou seja,

$$R_1C_1 = R_2C_2$$

Para isso, considere $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $C_1 = 10\ \mu$F e $C_2 = 5\ \mu$F.

3. Considere o pêndulo invertido no carrinho da figura 3.

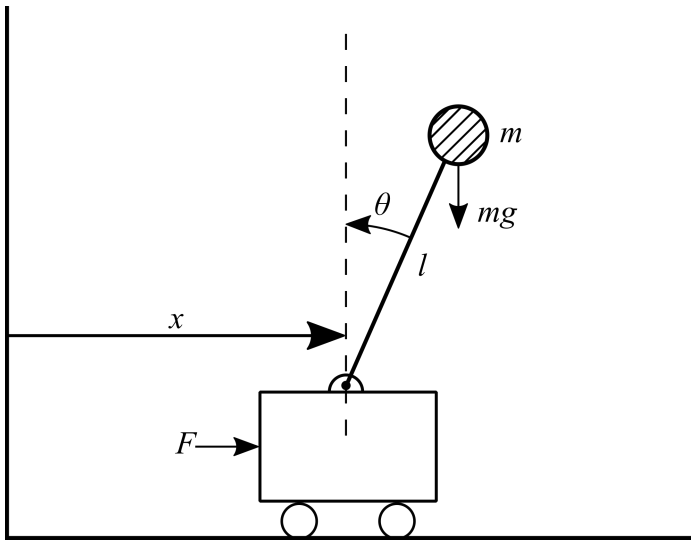

Figura 3: Pêndulo invertido no carrinho

O modelo aproximado do sistema é dado por

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = F$$
$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} - mg\theta = 0$$

onde x é o deslocamento do carrinho, θ é o ângulo do pêndulo com a vertical, M é a massa do carrinho, m é a massa do pêndulo, l é o comprimento da haste do pêndulo e g é a aceleração da gravidade. Considere agora o motor DC descrito na figura 4.

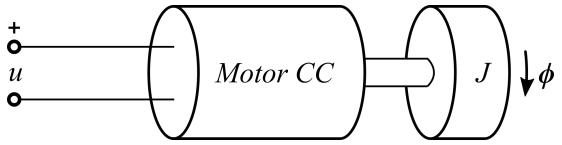

Figura 4: Motor CC acoplado à roda traseira do carrinho

A equação que modela o sistema é dada por

$$\tau = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u$$

onde τ é o torque do motor, k é a constante de torque do motor, R é a resistência do motor, r é a razão entre o torque e a força linear aplicada pelo motor ($\tau = r$) e u é a tensão aplicada ao terminais do motor.

(a) Supondo que o motor esteja acoplado à roda traseira do carrinho, de modo que o sistema formado pelo carrinho e pelo pêndulo seja considerado a carga do motor. Mostre que as equações diferenciais que modelam o sistema são dadas por

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \frac{k^2}{Mr^2R}\dot{x} + \frac{mg}{M}\theta = -\frac{k}{MRrl}u \\
&\ddot{\theta} - \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta - \frac{k^2}{Mr^2Rl}\dot{x} = -\frac{k}{MRrl}u
\end{aligned}$$

Dica: Lembre-se de que $\dot{x} = \omega r$.

(b) Considere o seguinte vetor de estado para o sistema

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad y = \begin{bmatrix} x & \theta \end{bmatrix}^T$$

Determine as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ do modelo em espaço de estados do sistema.

(c) Obtenha as funções de transferência de u para para uma das saídas.

(d) Sabendo que $m = 0,1$ kg, $M = 1$ kg, $l = 1$ m, $g = 9,8$ m/s^2,$k = 1$V$\cdot$s, $R = 100\,\Omega$ e $r = 0,02$ m, determine a observabilidade do sistema quando a saída é

(i) a posição do carrinho x_1.

(ii) o ângulo do pêndulo x_3.

(iii) A velocidade do carrinho x_2

(iv) A velocidade do carrinho e o ângulo do pêndulo.

4. Um carrinho de massa M possui dois pêndulos invertidos de comprimentos l_1 e l_2 e extremidades de massa m. Para pequenas variações em θ_1 e θ_2, a equação de estado

do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 \\ \Delta\ddot{\theta}_1 \\ \Delta\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/Ml_1 \\ -1/Ml_2 \end{bmatrix} u$$

onde

$$a_1 = \frac{(M+m)g}{Ml_1}, \quad a_2 = \frac{mg}{Ml_1}$$

$$a_3 = \frac{mg}{Ml_2}, \quad a_4 = \frac{(M+m)g}{Ml_2} \text{ e } u = F$$

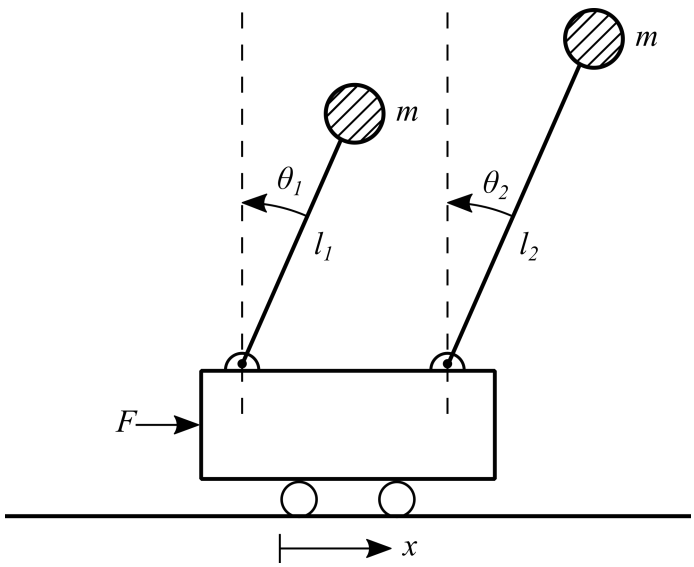

Figura 5: Carrinho com dois pêndulos invertidos

(a) É sempre possível controlar ambos os pêndulos, ou seja, mantê-los na posição vertical (θ_1 e $\theta_2 = 0°$) através de uma entrada $u = F$?

(b) O sistema é observável com a saída $y = \theta_1$?

5. Considere o sistema formado por um balão à ar quente.

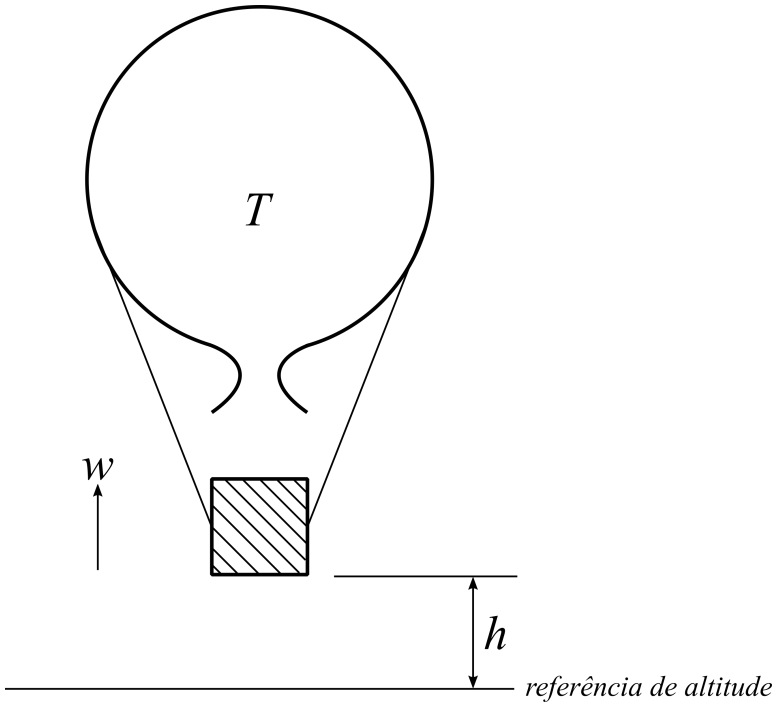

Figura 6: Balão à ar quente

As equações aproximadas da dinâmica do balão são dadas por

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= -\frac{1}{\tau_1}\theta + u \\
\dot{v} &= -\frac{1}{\tau_2}v + \sigma\theta + \frac{1}{\tau_2}w \\
\dot{h} &= w \\
\dot{w} &= 0
\end{aligned}
$$

(a) Determine um modelo no espaço de estados do sistema.

(b) Determine a controlabilidade do sistema.

(c) Obtenha as funções de transferência de u para h e de w para h.

(d) Determine a controlabilidade do sistema com relação à u e com relação à w.

6. Considere o circuito abaixo.

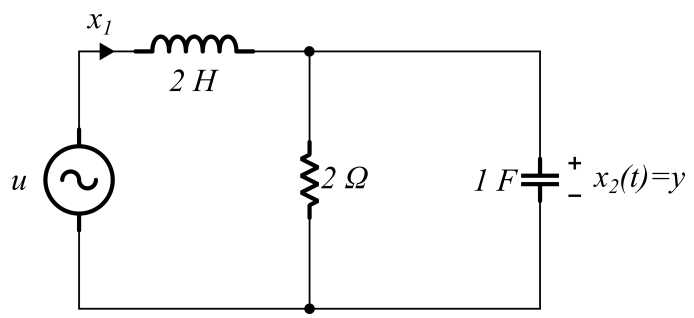

Figura 7: Circuito RLC com variáveis de estado x_1 e x_2

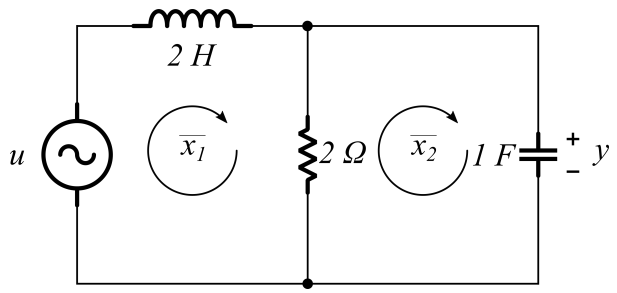

Figura 8: Circuito RLC com variáveis de estado $\overline{x_1}$ e $\overline{x_2}$

(a) Considere o circuito da figura 7. Obtenha o modelo no espaço de estados do circuito.

(b) Repita o processo para o circuito da figura 8.

(c) Determine a matriz de transformação equivalente entre os dois modelos.

(d) Obtenha os autovalores de ambos os sistemas.

(e) Obtenha a função de transferência de ambos os sistemas.

7. Considere o circuito da figura 9

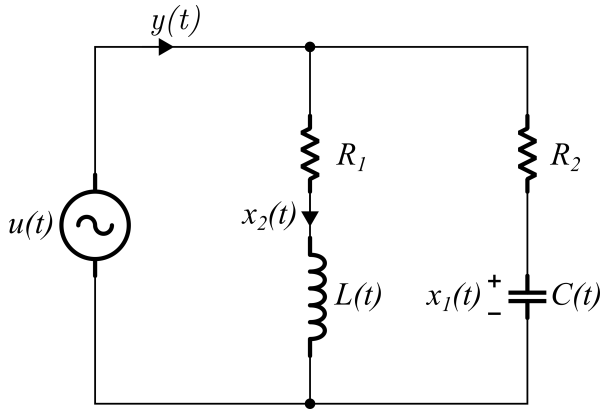

Figura 9: Circuito RLC

(a) Usando a tensão no capacitor e a corrente no indutor como variáveis de estado, obtenha um modelo no espaço de estados para o circuito.

(b) Encontre um conjunto de condições dos parâmetros R_1, R_2, L e C para que o circuito seja não-controlável. Repita o processo para um circuito não-observável.

(c) Encontre a função de transferência. Mostre que há cancelamento de pólos nas condições do item anterior.

8. Em 1963, o matemático e engenheiro húngaro Rudolph E. Kalman, considerado o pai do Controle Moderno, publicou um artigo intitulado "*Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*"onde ele estabelece os principais conceitos a respeito da Controlabilidade e Observabilidade de sistemas lineares. Neste artigo, o autor estuda um caso especial do circuito do exercício anterior. Trata-se de um circuito de

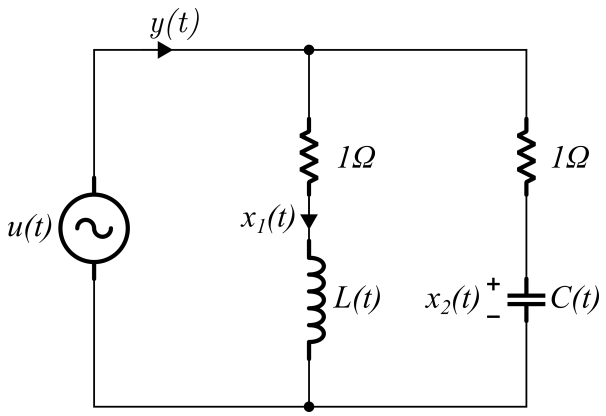

Figura 10: Circuito de resistência constante

resistência constante, o qual possui a seguinte relação entre seus elementos

$$\frac{L(t)}{C(t)} = R^2 = 1$$

(a) Obtenha o modelo no espaço de estados do circuito, considerando que x_1 é o fluxo magnético no indutor e x_2 é a carga elétrica no capacitor.

(b) Obtenha o modelo no espaço de estados do circuito, considerando a seguinte transformação equivalente

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(c) O que se pode dizer a respeito da controlabilidade e observabilidade do sistema, através da inspeção da equação de estado obtida no item **(b)**?

9. Considere o satélite da figura 11 cujo modelo no espaço de estados é dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 02\omega & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix}$$

onde u_r é a força radial, u_θ a força tangencial, r é o desvio radial e θ o desvio angular da referência orbital.

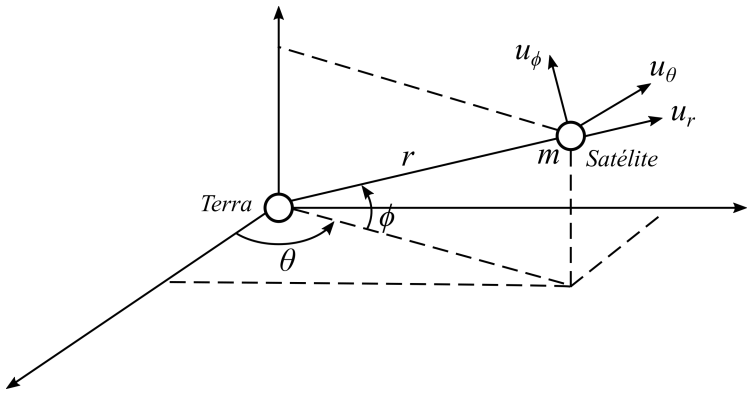

Figura 11: Satélite

(a) Determine se o sistema é controlável se há apenas propulsão radial, ou seja, quando $u_\theta = 0$.

(b) Repita o item anterior, considerando que há apenas propulsão tangencial, ou seja, quando $u_r = 0$.

(c) Determine se o sistema é observável com ambas as medições.

(d) Determine se o sistema é observável apenas com uma das medições.

10. Considere a aeronave da figura 12. Um modelo linear aproximado para a a dinâmica da lateral possui os seguintes vetores de estado e de entrada

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p & r & \beta & \varphi \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_a & \delta_l \end{bmatrix}$$

onde p e r são as taxas de balanceio (*roll rate*) e de cabeceio (*yaw rate*), β é o ângulo de escorregamento (*Sideslip angle*) e ϕ é o ângulo de balanceio (*Roll angle*). As entradas de controle são as variações de ângulo do *aileron* δ_a e do leme δ_l, respectivamente. Supondo alguns valores típicos, temos o seguinte modelo linearizado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0,7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0,7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 & 2,8 \\ 0 & -3,13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

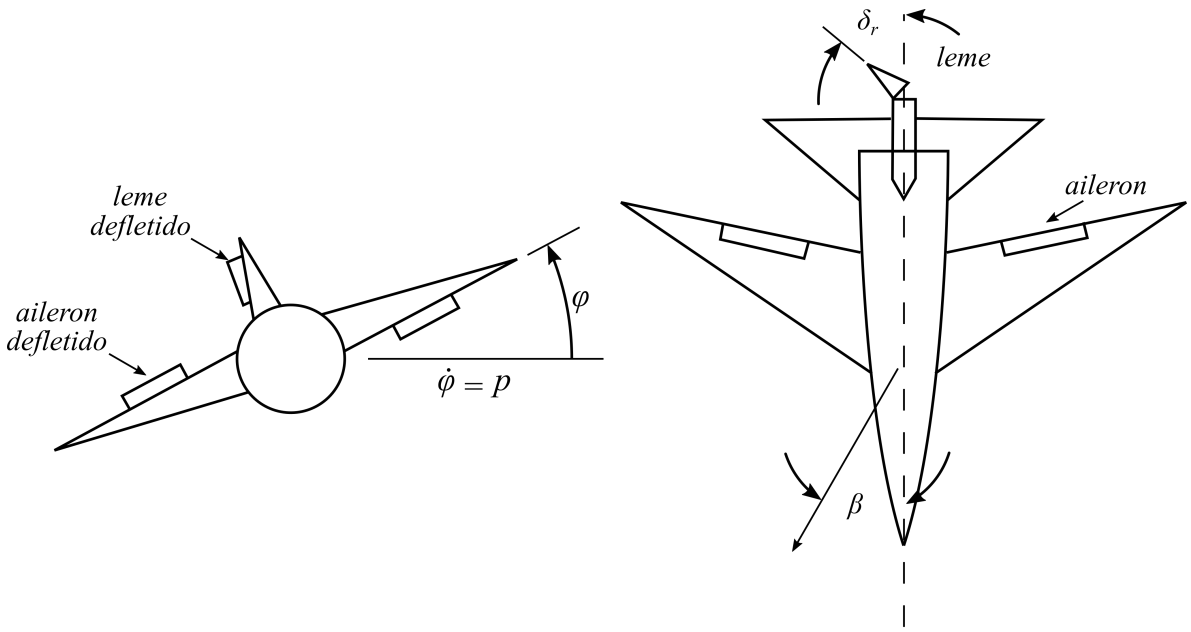

Figura 12: Aeronave

(a) Suponha que um falha no sistema impeça que a entrada δ_l seja manipulada. É possível controlar a aeronave apenas através de δ_a? Verifique que o sistema é controlável quando ambas as entradas estão presentes.

(b) Se a única saída a ser medida é a taxa de balanceio (*roll rate*), o sistema é observável?

Referências

[1] Kuo, B. C., “Sistemas de Controle Automático”, 4ª ed., Prentice-Hall, 1985.

[2] Chen, C. T., “Linear Systems Theory and Design”, 3rd ed., Oxford University Press, 1999.

[3] Khalil,H. K.,"Nonlinear Systems", 3rd ed., Prentice Hall, 2002.

[4] Brunton, S., "Data-Driven Science and Engineering", Cambridge University Press, 2019.

[5] Friedland, B., "Control System Design: An Introduction to State-Space Methods", 1ª Ed., Dover Publications, 1986.

[6] Brogam,L. W.,"Modern Control Theory,3ª Ed.,Prentice Hall, 1991.

[7] Kailath,T.,"Linear Systems",1ª Ed.,Pretince Hall, 1979.