AULAS ANTERIORES

18/09/2020

Um conjunto V será um EV se, e somente se:

* 1º requisito
$$\begin{cases} (i) \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad \vec{u} + \vec{v} \in V \\ (ii) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{u} \in V \end{cases}$$

* 2º requisito $\{$ 8 axiomas, A_1 a M_4, verificados.

→ Algebricamente, os elementos desses conjuntos se comportam como os vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$!

** SEV; CL; LD e LI; Base; MMB.

Introdução - Transformações Lineares

Relação mais simples entre variáveis → Funções Lineares

↓

Representam muitos problemas. Exemplo:

Se de 1 Kg de soja são extraídos 0,2 L de óleo de soja, então:

de x Kg de soja → $0{,}2x$ L de óleo.

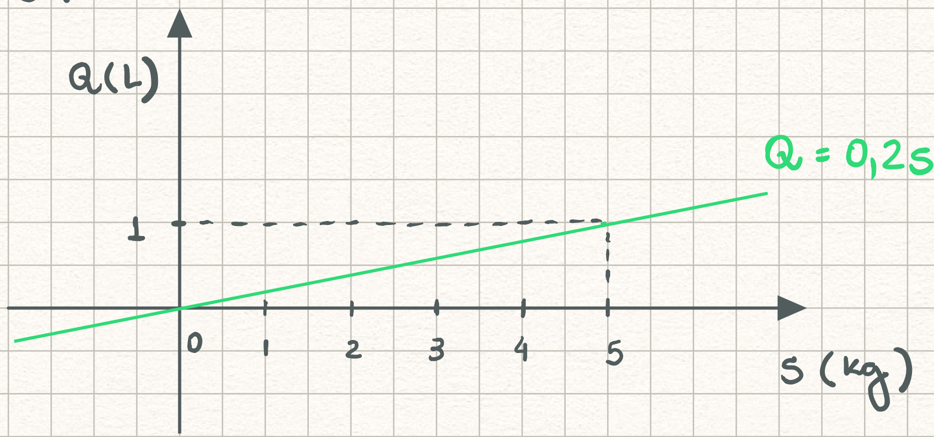
Em forma de função:

$$Q(s) = 0{,}2\, s$$

quantidade de Kg de soja

quantidade de L de óleo de soja

Graficamente:



Nesse exemplo, duas características são importantes:

I) Para calcular a produção de óleo de (S_1+S_2) Kg:

$$Q(S_1+S_2) = 0{,}2(S_1+S_2) = 0{,}2S_1 + 0{,}2S_2 = Q(S_1) + Q(S_2)$$

II) Para calcular a produção de óleo de (KS) Kg:

$$Q(KS) = 0{,}2(KS) = K\,0{,}2S = K\,Q(S)$$

→ Pensando em EVs: uma relação entre EVs, que satisfaça (I) e (II), é a mais natural possível, pois respeita a estrutura do EV. Essas relações são funções, chamadas de Transformações Lineares (TLs). Aqui, tanto a variável livre (independente) quanto a dependente serão vetores:

$$\vec{y} = f(\vec{x})$$

VETORES: $\mathbb{R}^n$, matrizes, polinômios, funções

Slide 03 - Exemplos

1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\boxed{T(\boxed{x,y})} = (3x, -2y, x-y)$

V W

vetor do domínio V

vetor do contra-domínio W (imagem do vetor de V)

T será TL se
$$\begin{cases} (\text{I}) & T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \\ (\text{II}) & T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \ \forall \vec{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Verificando a Linearidade: $\vec{u} = (x_1, y_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2)$

I) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$\underbrace{T(x_1+x_2, y_1+y_2)}_{A} = \underbrace{T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)}_{B}$$

$A = (3(x_1+x_2), -2(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

$B = (3x_1, -2y_1, x_1-y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2-y_2)$

$B = (3(x_1+x_2), -2(y_1+y_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

=

Confere!

II) $\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

$$T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$$

$$T(\alpha x_1, \alpha y_1) = \alpha T(x_1, y_1)$$

$$(3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) = \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$$

$$= (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1)$$

Confere!

$\longrightarrow$ Logo, T é uma TL.

2) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = 3x + 1$

T será TL se $\begin{cases} (\mathrm{I}) & T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \\ (\mathrm{II}) & T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}), \ \forall \vec{u} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

Verificando a linearidade: $u = (x_1)$; $v = (x_2)$

I) $u + v = x_1 + x_2$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$3(x_1 + x_2) + 1 = 3x_1 + 1 + 3x_2 + 1$

$= 3(x_1 + x_2) + 2$ Não confere!

II) $\alpha u = \alpha x_1$

$T(\alpha u) = \alpha T(u)$ $\longrightarrow$ Logo, T não é uma TL.

$T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1)$

$3(\alpha x_1) + 1 = \alpha (3x_1 + 1)$

$= 3(\alpha x_1) + \alpha$ Não confere!

Slide 5 - Propriedades

2) $T(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2)$

$\downarrow T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$T(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2) = T(a_1 \vec{v}_1) + T(a_2 \vec{v}_2)$

$\downarrow T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

$T(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2) = a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2)$

Analogamente:

$T(a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n) = a_1 T(\vec{v}_1) + \dots + a_n T(\vec{v}_n)$

Slide 6 - Exemplo

$$T(\underbrace{1,-1}_{\vec{v}_1}) = (3,2,-2)$$
$$T(\underbrace{-1,2}_{\vec{v}_2}) = (1,-1,3)$$
; $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = ?$

São conhecidas as imagens de $\underline{\underline{2}}$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Se esses vetores formarem uma base, $\forall\ \vec{v} = (x,y) \in V = \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$T(\vec{v}) = a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2) \quad (1) \quad , \quad \vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

* Portanto, verificar se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ formam base de $V = \mathbb{R}^2$, é um PASSO NECESSÁRIO!

$V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim(V) = 2 \longrightarrow$ 2 vetores LI formam base do $\mathbb{R}^2$.

$\longrightarrow \nexists\ k \in \mathbb{R}$ tal que $(1,-1) = k(-1,2) \longrightarrow \begin{cases} 1 = -k \\ -1 = 2k \end{cases}$

$\therefore\ \vec{v}_1, \vec{v}_2$ são LI e formam base.

Todo $\vec{v} = (x,y)$ pode ser escrito como CL dos vetores da base. Assim:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$
$$(x,y) = a_1(1,-1) + a_2(-1,2) \qquad \begin{cases} a_1 = 2x+y \\ a_2 = x+y \end{cases}$$

$a_1, a_2 \longrightarrow (1)$: $T(\vec{v}) = a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2)$

$$T(\vec{v}) = (2x+y)(3,2,-2) + (x+y)(1,-1,3)$$
$$T(\vec{v}) = (6x+3y, 4x+2y, -4x-2y) + (x+y, -x-y, 3x+3y)$$

$\vec{v} = (x,y)$ $\therefore$ $T(x,y) = (7x+4y, 3x+y, -x+y)$

Está correta? Testar com $\vec{v}_1$ ou $\vec{v}_2$!

$\vec{v}_1 = (1,-1) \longrightarrow T(\vec{v}_1) = (3,2,-2)$

Slide 7 - Exercícios

1) T será TL se
$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}),\ \forall\, \vec{u},\vec{v} \in V \\ (\mathrm{II})\ T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u}),\ \forall\, \vec{u} \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y-x, 0)$

$$\vec{u} = (x_1, y_1)\ ;\ \vec{v} = (x_2, y_2) \quad \begin{cases} \vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2,\ y_1+y_2) \\ \alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1) \end{cases}$$

I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$T(x_1+x_2, y_1+y_2) = T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$$
$$((y_1+y_2)-(x_1+x_2), 0) = (y_1-x_1, 0) + (y_2-x_2, 0)$$
$$= ((y_1+y_2)-(x_1+x_2), 0) \ \checkmark$$

II) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

$$T(\alpha x_1, \alpha y_1) = \alpha\, T(x_1, y_1)$$
$$(\alpha y_1 - \alpha x_1, 0) = \alpha(y_1 - x_1, 0)$$
$$= (\alpha y_1 - \alpha x_1, 0) \ \checkmark$$

→ Logo, T é uma TL.

b) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\ ;\ M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \\ \alpha M_1 = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

I) $T(M_1+M_2) = T(M_1) + T(M_2)$

$$\det\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$(a_1+a_2)(d_1+d_2) - (b_1+b_2)(c_1+c_2) = a_1d_1 - b_1c_1 + a_2d_2 - b_2c_2$$

$$a_1d_1 - b_1c_1 + a_2d_2 - b_2c_2 \boxed{+ a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 + b_2c_1} =$$

$$a_1d_1 - b_1c_1 + a_2d_2 - b_2c_2$$

X

II) $T(\alpha M_1) = \alpha T(M_1)$

$$\det\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} = \alpha \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^2 a_1d_1 - \alpha^2 b_1c_1 = \alpha(a_1d_1 - b_1c_1)$$

$$\alpha^2(a_1d_1 - b_1c_1) = \alpha(a_1d_1 - b_1c_1)$$ X

→ Logo, T não é uma TL.

c) $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_A(\vec{v}) = A\vec{v}$; $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \\ \alpha\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

I) $T_A(\vec{u}+\vec{v}) = T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) \\ c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax_2+by_2 \\ cx_2+dy_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) \\ c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2) \end{bmatrix} \checkmark$$

II) $T_A(\alpha \vec{u}) = \alpha T_A(\vec{u})$

$$A(\alpha \vec{u}) = \alpha A \vec{u}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha a x_1 + \alpha a y_1 \\ \alpha c x_1 + \alpha d y_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a x_1 + b y_1 \\ c x_1 + d y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a x_1 + \alpha a y_1 \\ \alpha c x_1 + \alpha d y_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\longrightarrow$ Logo, T é uma TL.

2) $T(\overset{\vec{v_1}}{-1, 1}) = (3, 2, 1)$

$T(\underset{\vec{v_2}}{0, 1}) = (1, 1, 0)$; $T(\vec{v}) = (-2, 1, -3)$, $\vec{v} = ?$

São conhecidas as imagens de $\underline{\underline{2}}$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Se esses vetores formarem uma base, $\forall \ \vec{v} = (x, y) \in V = \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$T(\vec{v}) = a_1 T(\vec{v_1}) + a_2 T(\vec{v_2}), \quad \vec{v} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2}$$

$V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim(V) = 2 \longrightarrow \underline{\underline{2}}$ vetores LI formam base do $\mathbb{R}^2$.

$\longrightarrow \nexists \ k \in \mathbb{R}$ tal que $(1, -1) = k(-1, 2)$

$\therefore \ \vec{v_1}, \vec{v_2}$ são $\underline{\underline{\text{LI}}}$ e formam $\underline{\underline{\text{base}}}$.

Todo $\vec{v} = (x, y) \longrightarrow$ CL dos vetores da base. Assim:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2}$$

$$(x, y) = a_1(-1, 1) + a_2(0, 1) \qquad \begin{cases} a_1 = -x \\ a_2 = x + y \end{cases}$$

$a_1, a_2 \longrightarrow \quad T(\vec{v}) = a_1 T(\vec{v_1}) + a_2 T(\vec{v_2})$

$$T(\vec{v}) = -x\,(3, 2, 1) + (x+y)\,(1, 1, 0)$$

$$T(\vec{v}) = (-3x, -2x, -x) + (x+y, x+y, 0)$$

$\vec{v} = (x, y) \quad \therefore \quad T(x, y) = (-2x + y, -x + y, -x)$ //

Se $T(\vec{v}) = (-2, 1, -3)$, isso implica que:

$$(-2, 1, -3) = (-2x + y, -x + y, -x)$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -x + y = 1 \\ -x = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \therefore \vec{v} = (3, 4)$$

3) $T(\vec{v_1}) = (1, -2)$

$T(\vec{v_2}) = (3, 1)$, $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

$T(\vec{v_3}) = (0, 2)$ $\qquad T(5, 3, -2) = ?$

$\vec{v_1} = (0, 1, 0)$; $\vec{v_2} = (1, 0, 1)$; $\vec{v_3} = (1, 1, 0)$.

Foi dito que B é base do $\mathbb{R}^3$; logo, todo $\vec{v} = (x, y, z) \longrightarrow$ CL dos vetores da base. Assim:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + a_3 \vec{v_3}$$

$$(x,y,z) = a_1(0,1,0) + a_2(1,0,1) + a_3(1,1,0)$$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_3 = y \\ a_2 = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = y + z - x \\ a_2 = z \\ a_3 = x - z \end{cases}$$

Da Linearidade das TLs, se $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ formam base, tem-se que:

$$T(\vec{v}) = a_1 T(\vec{v_1}) + a_2 T(\vec{v_2}) + a_3 T(\vec{v_3})$$

$$T(\vec{v}) = (y+z-x)(1,-2) + z(3,1) + (x-z)(0,2)$$

$$T(\vec{v}) = (y+z-x, -2y-2z+2x) + (3z, z) + (0, 2x-2z)$$

$$\vec{v} = (x,y,z) \quad \therefore \quad T(x,y,z) = (-x+y+4z, 4x-2y-3z)$$

Se $\vec{v} = (5,3,-2)$, então:

$$T(5,3,-2) = (-5+3-8, 20-6+6)$$

$$\therefore T(5,3,-2) = (-10, 20)$$