Segunda Lista de Mecânica Quântica - 18/9/2020

1. Mostre que para potenciais $V(x)$, independente do tempo, uma solução particular da Eq. de Sch. é da forma: $\psi(x,t) = \phi(x)f(t)$. Determine $f(t)$ e qual equação $\phi(x)$ deve satizfazer. IMPORTANTE: essa é uma solução particular, denominada de estado estacionário (por que?). A solução geral é $\Psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$. Mostre que de fato $\Psi(x,t)$ satisfaz a Eq. de Schödinger. Verifique que realmente Ψ não é estacionária.

2. Griffiths, prob. 2.45: Mostre que em uma dimensão não há estados ligados degenerados, isto é, normalizáveis e com a mesma energia. Sugestão: suponha ψ_1 e ψ_2 duas autofunções da Eq. de Schrödinger com a mesma energia E, e normalizadas. Partindo de $H\psi_1 = E\psi_1$ e $H\psi_2 = E\psi_2$, mostre que $\psi_2 d\psi_1/dx - \psi_1 d\psi_2/dx = 0$. Usando esse resultado, mostre que $d(\psi_2/\psi_1) = 0$, e portanto, $\psi_2 = cte \cdot \psi_1$. Assim, se ψ_1 for normalizada, ψ_2 não poderá ser, a menos que a *cte* seja unitária, logo, $\psi_1 = \psi_2$.

3. Considere a função de onda $\psi(x,t) = Ae^{ikx - i\omega t} + Be^{-ikx - i\omega t}$, com A e B constantes **complexas**, k e ω constantes reais. Determine a densidade de probabilidade, e a respectiva corrente de probabilidade. Mostre que a Eq. de continuidade é obedecida.

4. Uma função de onda é escrita como $\psi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$, sendo $H\phi_n = E_n\phi_n$. Utilize dois caminhos distintos para encontrar o valor médio de H.

5. Uma partícula (massa m) incide vinda de $x < 0$ num degrau de energia potencial definido por $V(x) = 0$ para $x < 0$ e $V(x) = -V_0 < 0$ para $x > 0$. Determine as autofunções para todo x e para todos os possíveis valores da energia E. Calcule as correntes de probabilidade incidente, refletida e transmitida. Considere que a função de onda (parte espacial) incidente seja dada por Ae^{ikx}. Relacione k com E. Expresse as correntes em termos de A, E e m. Verifique a conservação da corrente na barreira. Determne os coeficientes de reflexão e transmissão.

6. O poço de potencial $V(x) = -V_0 < 0$ para $|x| < a$, e zero fora desse intervalo, está resolvido no livro do Griffiths e em notas de aula. Observe que as soluções para $E < 0$ são pares ou ímpares, uma vez que o potencial é par. Para $E > 0$, aprecie o coeficiente de transmissão observando que ele se torna unitário para valores específicos da energia.

7. Determine o coeficiente de transmissão para o potencial $V(x) = \alpha\delta(x)$, sendo α constante positiva. Relacione o resultado com um limite particular (que você deve encontrar) daquele do item anterior.

8. Considere o poço de potencial com a energia potencial definida por $V(x) = 0$ para $|x| < L/2$ e $V(x) = \infty$ fora desse intervalo. Coloque em $t = 0$ uma partícula representada pela função de onda $\Psi(x,0) = \alpha(x+a)$ se $-a \leq x \leq 0$ e $\Psi(x,0) = \alpha(a-x)$ se $0 \leq x \leq a$, com α constante e $a < L/2$. Determine a função de onda $\Psi(x,t)$. Calcule o valor médio

da energia (aqui, se você se deparar com uma série e não souber somá-la, apenas dê um símbolo para ela, ou faça um código de computador para somá-la).

9. Ex. 2.2 do Griffiths: uma partícula no poço quadrado infinito (largura L) tem a função de onda inicial $\psi(x, 0) = Ax(L - x)$. Determine $\psi(x, t)$. Pelo formato de $\psi(x, 0)$, qual deve ser aproximadamente o valor médio da energia? Calcule o valor exato.

10. Determine a probabilidade de numa medida da energia do estado fundamental de um oscilador harmônico este se encontrar dentro dos limites clássicos, isto é, entre os pontos de retorno clássicos correspondentes à energia E_0. Idem para o primeiro estado excitado (agora com energia E_1, claro!). Qual a tendência desse valor de probabilidade com o aumento da energia? Vide Fig. 2.7 do Griffiths.

11. O teorema do virial afirma que se a energia potencial for da forma $V(x) = \alpha x^l$, então, $l\langle V(x)\rangle = 2\langle T\rangle$, onde T é o operador energia cinética. Determine, então, as incertezas Δx e Δp para o n-ésimo auto estado do oscilador harmônico. Quanto vale o produto $\Delta x \cdot \Delta p$? Para qual estado esse valor é mínimo?

12. Um oscilador harmônico oscila na vertical de um campo gravitacional uniforme (aceleração g). Expresse suas autofunções em termos daquelas do oscilador na horizontal, $\phi_n(x)$ (aquelas do livro). Qual a nova frequência de oscilação e qual o novo ponto de equilíbrio? Não há necessidade de se resolver o problema desde seu início. Procure reescrever o novo Hamiltoniano convenientemente.

13. Partindo da autofunção $\phi_1(x)$ do oscilador harmônico, obtenha a autofunção normalizada correspondente à energia $E_2 = 5\hbar\omega/2$. Observe a paridade das funções envolvidas. Qual a paridade da n-ésima autofunção $\phi_n(x)$ do oscilador?

14. Um oscilador está no seu n-ésimo autoestado $\phi_n(x)$. Calcule:
    (a) $\langle a\rangle_n$, $\langle a^2\rangle_n$, $\langle a^\dagger\rangle_n$, $\langle (a^\dagger)^2\rangle_n$, $\langle aa^\dagger\rangle_n$, $\langle a^\dagger a\rangle_n$.
    (b) $\langle x\rangle_n$, $\langle x^2\rangle_n$, $\langle p\rangle_n$, $\langle p^2\rangle_n$
    (c) $\langle T(p)\rangle_n$ e $\langle V(x)\rangle_n$, sendo T e V os operadores energia cinética e potencial.
    (d) Determine o valor do produto $\Delta x\, \Delta p$ nesse autoestado.

15. Um estado $|\alpha\rangle$ de um oscilador harmônico é coerente se ele é autoestado do operador a:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \; ,$$

sendo α uma constante **complexa**. A razão do nome coerente vem do valor do produto das incertezas dos operadores x e p. Determine esse produto. Qual (ou quais) autoestado do oscilador é um estado coerente e por que? Observações: α deve ser tratada como complexa em geral. O estado $|\alpha\rangle$ não deve ser confundido com os autoestados $|n\rangle$ do oscilador, portanto, não vale escrever $a|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha - 1}|\alpha - 1\rangle$ e nem o correspondente de $a^\dagger$. Note inclusive que $< x >$ ou $< p >$ não são nulas nesse estado.