Divergência e rotacional de um campo de vetores

Cálculo II – Aula 6

Profa. Dra. Patricia Targon Campana

Grupo de Biomateriais e Espectroscopia

pcampana@usp.br

Sala 339C – Titanic

3091-8883

9 3775-3979

tumblr. sciencenebula.tumblr.com

facebook /Campana.PT

twitter @profaPCampana

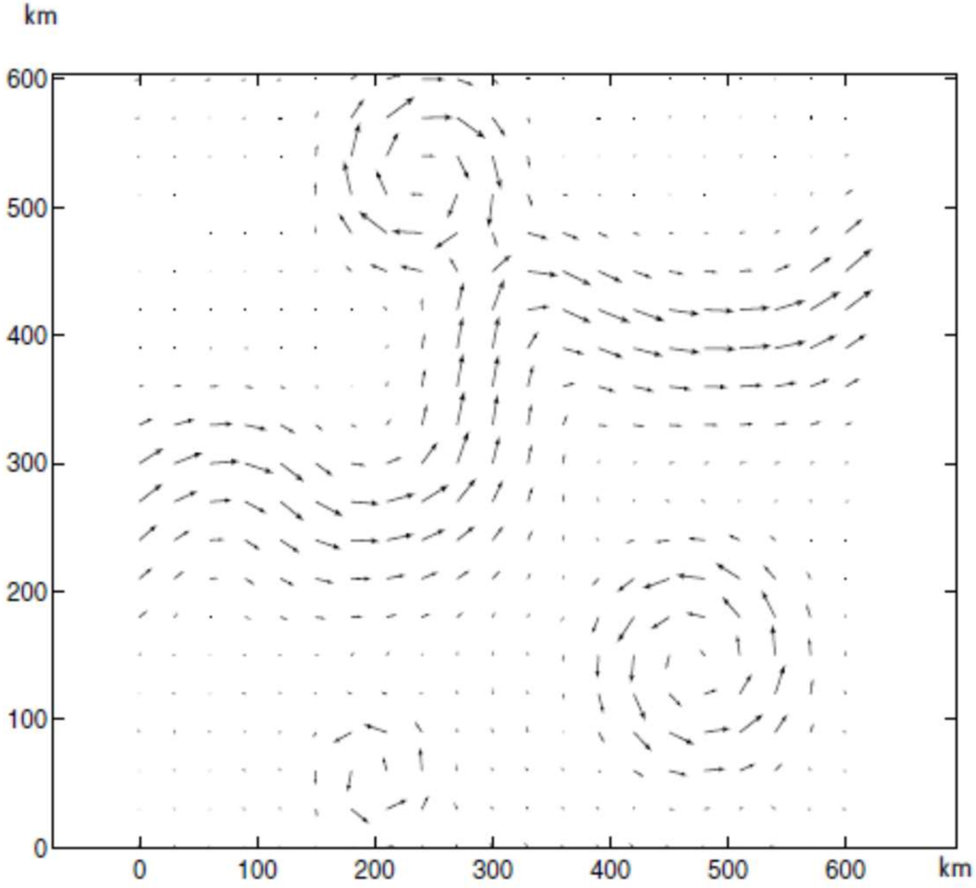
Campos Vetoriais

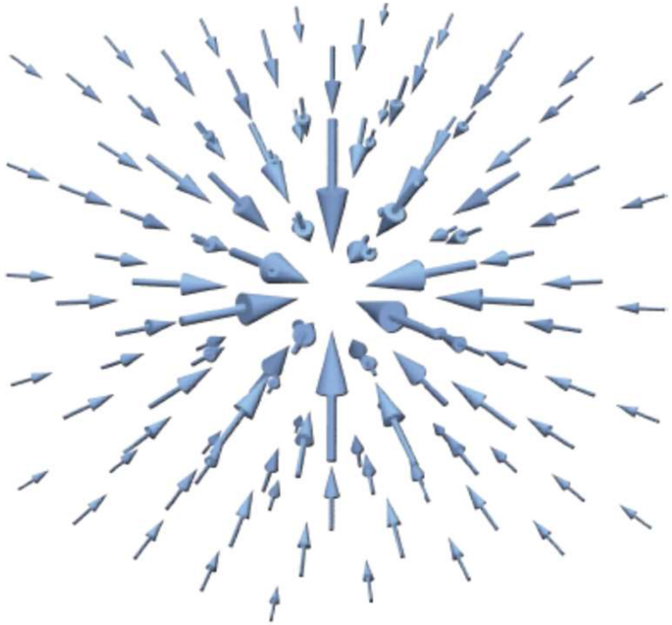
Um campo vetorial é uma função que atribui um vetor a cada ponto no plano ou no espaço tridimensional.

Um exemplo de um campo vetorial é o gradiente de uma função f (x, y); em cada ponto (x, y) o vetor grad f (x, y) aponta na direção da taxa máxima de aumento de f.

BMEspec

corrente do golfo





Campos de força
Outra quantidade física
representada por um vetor é a força.

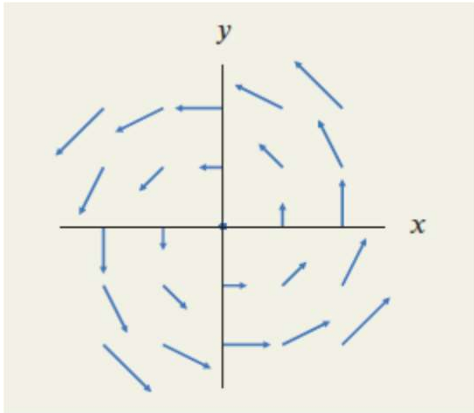
Definição

Um campo vetorial no espaço é uma função $\vec{F}$ (x, y) cujo valor em um ponto (x, y) é uma função bidimensional
vetor. Da mesma forma, um campo vetorial no espaço é uma função $\vec{F}$ (x, y, z) cujos valores são 3-vetores dimensionais.

Exemplo: Esboce o campo vetorial no espaço 2D dado por:

$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

		y		
		-1	0	1
x	-1	$\vec{i}-\vec{j}$	$-\vec{j}$	$-\vec{i}-\vec{j}$
	0	$\vec{i}$	$\vec{0}$	$-\vec{i}$
	1	$\vec{i}+\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}+\vec{j}$



Divergente e rotacional

são duas operações essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica de fluidos;

lembram a derivada mas produzem um campo vetorial e um campo escalar;

são descritas em termos do operador diferencial

$$\nabla$$

$$\nabla$$

O operador diferencial é definido como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

vetor gradiente: obtido aplicando o operador diferencial num campo escalar f :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Rotacional

Se **F** = *P***i** + *Q***j** + *R***k** é um campo vetorial (espaço dos Reias em 3D), o rotacional de F é: $\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Divergente

Se **F** = *P***i** + *Q***j** + *R***k** é um campo vetorial (espaço dos Reias em 3D), o divergente de F é:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned}\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}$$

Exemplo: vamos determinar o rotacional e o divergente de

$$\mathbf{F}\,(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} - 3yz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} - 3yz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Referências

Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, William G. McCallum - Calculus_ Multivariable (2017, Wiley)