Exercícios Extras - Distribuições de Probabilidades Contínuas

Cálculo de Integrais

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde

$F(x)$ é a primitiva de $f(x)$ ou seja, é a função F tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Procure a função F tal que sua derivada é f.

Ex: $f(x) = a x^n$

A primitiva de $f(x)$ é $F(x) = \dfrac{a x^{n+1}}{n+1}$

porque $F'(x) = \dfrac{a(n+1)x^n}{n+1} = a x^n$.

Ex: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

A primitiva de $f(x)$ é $F(x) = -e^{-\alpha x}$

porque é $F'(x) = -\left(e^{-\alpha x}\right) \cdot (-\alpha)$

regra da cadeia para derivada de funções compostas

Métodos de Obtenção das Primitivas

Substituição

Integração por partes - foi utilizado no cálculo da esperança da variável aleatória com distribuição exponencial.

Este método é consequência do resultado da derivada do produto:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$u'v = (u \cdot v)' - uv'$$

$$\int u'v = \underbrace{\int (uv)' - \int uv'} = uv - \int uv'$$

Exercício 9 - Cap. 7 - Bussab e Morettin

Certa liga é formada pela mistura de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X, que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \frac{3}{5.10^5} x(100-x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que L, o lucro líquido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por $L = C_1 + C_2 X$. Calcule $E(L)$, o lucro esperado por unidade.

$$E(X) = \int_0^{100} x \frac{3}{5.10^5} x(100-x)\,dx = \int_0^{100} \left[\frac{3.100x^2}{5.10^5} - \frac{3x^3}{5.10^5}\right] dx =$$

$$= \frac{3}{5.10^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{100} - \frac{3}{5.10^5}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{100} =$$

$$= \frac{3}{5.10^3}\,\frac{100^3}{3} - \frac{3.100^4}{5.10^5.4} = 50$$

$$L = C_1 + C_2 X \qquad E(L) = E(C_1 + C_2 X) =$$

$$= E(C_1) + C_2 E(X) = C_1 + C_2 . 50$$

Exercício 21 - Cap. 6 - Magalhães e Lima

Distribuição Exponencial de parâmetro 1.
Calcule a probabilidade de sortearmos um valor que se distancie no máximo 0,5 da média.
Qual é o valor do terceiro quartil?

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases} \qquad \alpha = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \cdot e^{-1x} \quad x \geq 0$$

$$P(|X-\mu| \leq 0{,}5) = ?$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

$$P(|X-1| \leq 0{,}5) = P(-0{,}5 \leq X-1 \leq 0{,}5) =$$

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$= P(1-0{,}5 \leq X \leq 1+0{,}5) = P(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5) =$$

$$= \int_{0{,}5}^{1} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{0{,}5}^{1{,}5} = e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} = 0{,}3834$$

Cálculo do 3.º Quartil : q_3

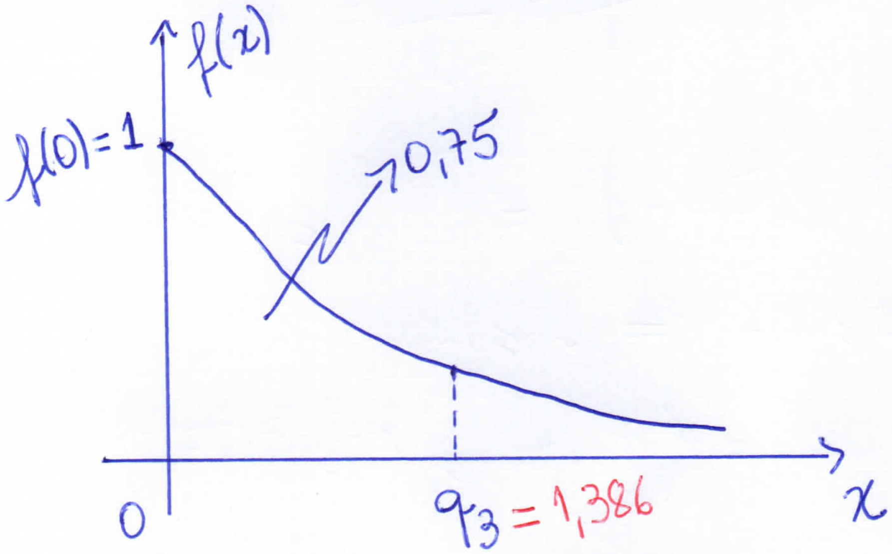
$$P(X \leq q_3) = 0{,}75$$

$$\int_0^{q_3} e^{-x}\,dx = 0{,}75$$

$$-e^{-x}\Big|_0^{q_3} = 0{,}75 \Rightarrow 1 - e^{-q_3} = 0{,}75$$

$$e^{-q_3} = 0{,}25 \Rightarrow -q_3 \ln e = \ln 0{,}25$$

$$-q_3 = -1{,}386 \Rightarrow q_3 = 1{,}386$$



Exercício 3 - Seção 6.2 - Magalhães e Lima

Tempo (em minutos) necessário para um medicamento contra dor fazer efeito tem distribuição Uniforme no intervalo de 5 a 15.
Se um paciente com dor recebe o remédio, qual é a probabilidade da dor

a) Cessar em até 10 minutos?

b) Demorar pelo menos 12 minutos?

c) Durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10?

d) Calcule o tempo esperado para o medicamento fazer efeito.

X - tempo necessário para o medicamento fazer efeito

$X \sim U[5, 15]$

d) Tempo esperado

$$X \sim U[a, b] \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \text{Tempo esperado} = E(X) = \frac{5+15}{2} = 10 \text{ minutos}$$

Densidade da v. a. X

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & 5 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pode calcular pela área

a) $P(X \leq 10) = \displaystyle\int_5^{10} \frac{1}{10}\, dx = \frac{x}{10}\Big|_5^{10} = \frac{10}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) $P(X \geq 12) = \displaystyle\int_{12}^{15} \frac{1}{10}\, dx = \frac{x}{10}\Big|_{12}^{15} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10}$

c) $P(X > 7 \mid X < 10) = \dfrac{P(X > 7, X < 10)}{P(X < 10)} =$

$= \dfrac{P(7 < X < 10)}{P(X < 10)} = \dfrac{(10-7)/10}{(10-5)/10} = \dfrac{3}{5}$

Exercício 11 - Seção 6.3 - Magalhães e Lima

Tempo para recuperação de pacientes submetidos a um tipo de cirurgia - X (em meses)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{5}{12}, & 1 < x \leq 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a probabilidade do tempo de recuperação ser inferior a 2 meses.

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dx + \int_1^2 \left[-\frac{1}{12}x + \frac{5}{12}\right]dx$$

$$= \frac{x}{3}\Big|_0^1 + \left[-\frac{1}{12}\frac{x^2}{2} + \frac{5}{12}x\right]_1^2 =$$

a) Determine a média e a Mediana do tempo de recuperação.

b) Calcule o desvio padrão.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{3}\, dx + \int_1^5 x\left(-\frac{x}{12} + \frac{5}{12}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{6}\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{12}\frac{x^3}{3} + \frac{5}{12}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^5 =$$

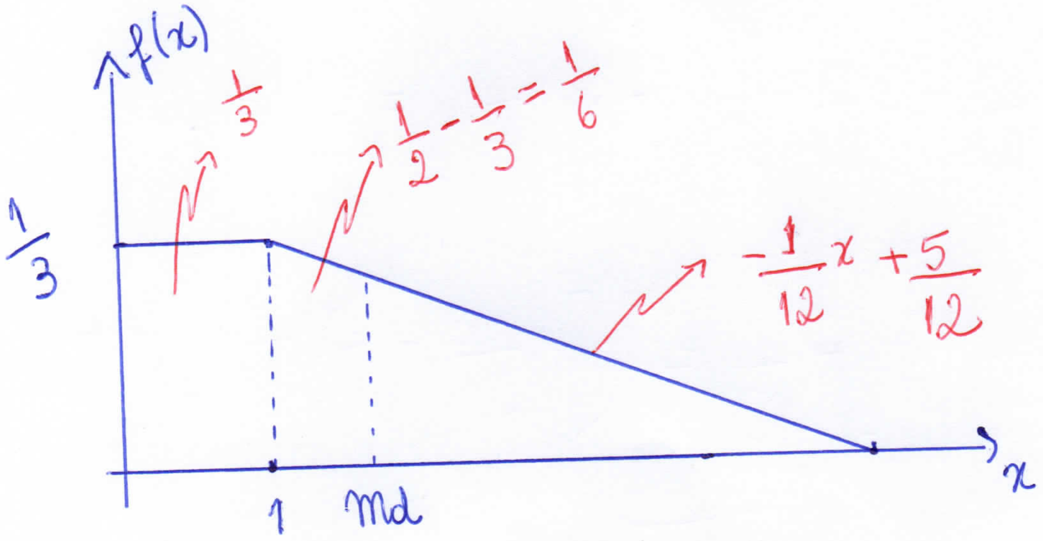
$$= \frac{1-0}{6} + \left[-\frac{1}{12}\frac{5^3-1^3}{3} + \frac{5(5^2-1^2)}{24}\right] = \frac{31}{18} = 1{,}72 \text{ meses}$$

Cálculo da Mediana

$$P(X \leq Md) = 0{,}5$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{3}\, dx = \frac{x}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ a mediana está no intervalo $[1, 5]$



$$\int_1^{md} \left(-\frac{1}{12}x + \frac{5}{12}\right) dx = \frac{1}{6}$$

$$\left[-\frac{x^2}{24} + \frac{5x}{12}\right]_1^{md} = \frac{5}{12}(md-1) - \frac{1}{24}(md^2-1) = \frac{1}{6}$$

$$10(md-1) - (md^2-1) = 4$$

$$md^2 - 10md + 13 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4(1)(13) = 48$$

$$md = \frac{10 \pm \sqrt{48}}{2} \begin{cases} \frac{2(5+2\sqrt{3})}{2} = 5+2\sqrt{3} \\ \frac{2(5-2\sqrt{3})}{2} = 5-2\sqrt{3} = \underline{1{,}54} \end{cases}$$

$5+2\sqrt{3}$ ↓ não convém

Cálculo do Desvio Padrão

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} dx + \int_1^5 x^2\left(-\frac{1}{12}x + \frac{5}{12}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{9}\Big|_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4 \cdot 12} + \frac{5x^3}{12 \cdot 3}\right]_1^5 =$$

$$\frac{1}{9}+\left[\frac{-625}{48}+\frac{5.125}{36}+\frac{1}{4.12}-\frac{5}{36}\right]=$$

$$=4{,}3333$$

$$\sigma^2=Var(X)=4{,}3333-1{,}72^2=1{,}3749$$

Desvio Padrão $\sigma=\sqrt{1{,}3749}=1{,}1725$

Plantão

Monitor: Rodrigo

Sexta-Feira 18:00 - 19:00h

A partir da semana que vem (25/09)