

PESQUISA OPERACIONAL I

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

Profa. Dra. Catarina Barbosa Careta

Depart. de Economia, Administração e Sociologia

ESALQ - Universidade de São Paulo

**“Ração de custo
mínimo”**

FORMULAÇÃO GERAL

- Obter a ração de mínimo custo;
- A partir da disponibilidade de uma série de ingredientes;
- Respeitando-se as exigências nutricionais pertinentes.

Ração animal



Problemas de Mistura

Problemas de Mistura

- Consiste em combinar insumos (materiais, ingredientes etc.) para gerar produtos com determinadas especificações
- Implementados com sucesso - na prática - em diversas indústrias:
 - Agroindústria (por exemplo, formulação de rações)
 - Indústria de alimentos (por exemplo, “blendagem” de sucos)
 - Indústria siderúrgica (por exemplo, ligas metálicas)
 - Indústria de petróleo (por exemplo, mistura de biodiesel na gasolina)

Problemas de Mistura

Outros exemplos particulares dessa classe de problemas:

- Mistura de alimentos e vitaminas
- Dietas alimentares
- Mistura de óleos
- Fabricação de fertilizantes
- Composição de areia para filtro

Ração Animal

- Fábricas de ração podem produzir diversos tipos de rações para vários tipos de animais, de pequeno e grande portes (bovinos, equinos, caninos, felinos, galináceos etc.)
- Essas rações são produzidas pela mistura de alimentos ou farinhas, como: milho, farelo de arroz, farinha de osso, soja, farinha de peixe, entre outros (na prática, podem ser dezenas/centenas de ingredientes)

Ração Animal

- Os custos dos insumos devem ser conhecidos
- Assim como devem ser conhecidas a composição nutricional e as quantidades de componentes (proteína, cálcio, ferro, manganês, calorias etc.)
- A nutrição veterinária especifica as necessidades mínimas e máximas dos nutrientes (normalmente, por kg de ração) para cada tipo de animal e ganho de peso

Problema de otimização

- Qual a quantidade ideal de cada ingrediente por quilo de ração para que a necessidade nutricional seja atendida, com o custo total dos ingredientes sendo o menor possível?
- Função Objetivo: Custo total (a ser minimizado)
- Variáveis: Quantidades de cada ingrediente
- Restrições: Necessidades nutricionais e de peso

Formulação Matemática

Variáveis de decisão:

- X_j = quantidade do ingrediente j a ser usada em uma unidade (ex: 1 kg) da mistura

Dados:

- n = número de ingredientes
- m = número de componentes
- a_{ij} = fração do componente i no ingrediente j
- b_i = fração do componente i na mistura
- c_j = custo unitário do ingrediente j

Exemplo 1

- Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para um determinado animal, misturando farinhas de 3 ingredientes básicos: **farinhas de osso, de soja e de peixe**.
- Cada um dos ingredientes pode ser adquirido por um determinado custo unitário e esses ingredientes contêm diferentes quantidades de proteína e cálcio. Esses nutrientes são necessários para uma dieta nutricional balanceada.
- O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1 kg de ração (vide tabela).

Exemplo 1

		Ingredientes		
Nutrientes	Farinha de osso	Farinha de soja	Farinha de peixe	Ração
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custo (\$/kg)	0,56	0,81	0,46	

Exemplo 1

- Quais as quantidades de cada ingrediente a serem misturadas de modo a produzir 1 kg de ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo?
- Quais são as variáveis de decisão (X_j) e parâmetros (a_{ij} , b_i e c_j) do modelo?
- Quais são as restrições e função objetivo do modelo?

Exemplo 1

		Ingredientes		
Nutrientes	Farinha de osso	Soja	Peixe	Ração
Proteína	$a_{11}=0,2$	$a_{12}=0,5$	$a_{13}=0,4$	$b_1=0,3$
Cálcio	$a_{21}=0,6$	$a_{22}=0,4$	$a_{23}=0,4$	$b_2=0,5$
Custo (\$/kg)	$c_1=0,56$	$c_2=0,81$	$c_3=0,46$	

- X_1 = Quantidade de farinha de osso (em 1 kg de ração)
- X_2 = Quantidade de farinha de soja (em 1 kg de ração)
- X_3 = Quantidade de farinha de peixe (em 1 kg de ração)

Formulação Matemática

$$\text{MIN } 0,56 x_1 + 0,81 x_2 + 0,46 x_3$$

ST

$$0,2 x_1 + 0,5 x_2 + 0,4 x_3 \geq 0,3$$

$$0,6 x_1 + 0,4 x_2 + 0,4 x_3 \geq 0,5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0$$

Exemplo 1 – Solução:

- $X_1 = 0,500$ kg = quantidade de farinha de osso (em 1 kg de ração)
- $X_2 = 0$ = quantidade de farinha de soja (em 1 kg de ração)
- $X_3 = 0,500$ kg = quantidade de farinha de peixe (em 1 kg de ração)
- Custo mínimo = \$0,51 (por kg de ração)

- Caso algum ingrediente não tenha sido necessário, qual seria o custo para que esse ingrediente venha a fazer parte da mistura? \$0,81/kg - \$0,35/kg = \$0,46/kg (relatório de análise de sensibilidade)

Exemplo 2

Para fornecer 1 kg de ração balanceada a frangos de corte é necessário que a mesma contenha, no mínimo, 17,16% de proteína e 3.000 quilocalorias de energia metabolizável aparente. Admite-se que estejam disponíveis para a formulação da ração apenas milho, ao preço de \$ 1,80/kg, e farelo de soja, ao preço de \$4,20/kg. O milho contém 8,51% de proteína e 3.146 quilocalorias de energia por quilograma. O farelo de soja, por sua vez, contém 45,6% de proteína e 2.283 quilocalorias de energia por quilograma. Pede-se determinar as quantidades de milho e farelo de soja que devem ser misturadas para que o alimento final satisfaça às necessidades alimentares das aves e, ao mesmo tempo, tenha o menor custo possível.

Exemplo 2

$$\text{Min } Z = 1,80 x_1 + 4,20 x_2$$

sujeito a

$$3146x_1 + 2283x_2 \geq 3000$$

$$8,51x_1 + 45,6x_2 \geq 17,16$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

O problema não tem solução! É necessário reestruturar o problema para rações com pesos distintos de 1 kg.

Exemplo 2

Ajuste no modelo (I)

$$\text{Min } Z = 1,80 x_1 + 4,20 x_2$$

sujeito a

$$3146x_1 + 2283x_2 \geq 3000$$

$$8,51 (x_1/x_1 + x_2) + 45,6 (x_2/x_1 + x_2) \geq 17,16$$

$$x_1 + x_2 = P$$

Exemplo 2

Ajuste no modelo (II)

$$\text{Min } Z = 1,80 x_1 + 4,20 x_2$$

sujeito a

$$3146x_1 + 2283x_2 \geq 3000$$

$$8,51 (x_1) + 45,6 (x_2) \geq 17,16 (x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 = P$$

Exemplo 2

Ajuste no modelo (III)

$$\text{Min } Z = 1,80 x_1 + 4,20 x_2$$

sujeito a

$$3146x_1 + 2283x_2 \geq 3000$$

$$8,51 (x_1) + 45,6 (x_2) - 17,16 (x_1) - 17,16 (x_2) \geq 0$$

$$x_1 + x_2 - P = 0$$

Exemplo 2

Ajuste no modelo (IV)

$$\text{Min } Z = 1,80 x_1 + 4,20 x_2$$

sujeito a

$$3146x_1 + 2283x_2 \geq 3000$$

$$- 8,65 (x_1) + 28,44 (x_2) \geq 0$$

$$x_1 + x_2 - P = 0$$

Exemplo 2

Solução

- $x_1 = 0,781174$ kg
- $x_2 = 0,237593$ kg
- $P = 1,018768$ kg

- A ração tem um custo mínimo de \$2,404006

- Conferindo o percentual de proteína:
$$8,51 \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2} \right) + 45,6 \left(\frac{x_2}{x_1 + x_2} \right) = 8,51 \left(\frac{0,781174}{1,018768} \right) + 45,6 \left(\frac{0,237593}{1,018768} \right) = 6,525323 + 10,634650 = 17,16\%$$

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

DIETA SUÍNA

A) Admitindo que um produtor deseja formular uma ração de custo mínimo para suínos em crescimento (30 a 60 kg), deve-se determinar a composição de 1 kg de ração. Minimize o custo total de 1 kg da mistura a partir das informações fornecidas (*Caixeta Filho, 2015*).

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Alimentos	Variável correspondente	Proteína (%)	Energia (kcal/kg)	Cálcio (%)	Fósforo (%)	Lisina (%)	Preço (\$/kg)
Milho	Milho	8,51	3493	0,02	0,27	0,23	1,80
Farinha de soja	Fsoja	45,60	3378	0,36	0,55	2,87	4,20
Farinha de trigo	Ftrigo	15,30	2103	0,12	0,88	0,57	2,00
Farinha de Carne	Fcarne	45,20	2133	11,60	5,40	2,28	7,50
Farinha de sangue	Fsangue	80,90	2809	0,20	0,15	6,57	9,00
Fosfato bicálcico	Fosbica	-	-	22,61	17,03	-	14,50
Cálcio	Calca	-	-	37,00	-	-	0,80
Sal	Sal	-	-	-	-	-	3,00
Mistura Mineral	MistA	-	-	-	-	-	28,00
Mistura vitamínica	MistB	-	-	-	-	-	145,00

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Item	Mínimo Requerido	Máximo Permitido
Proteína (%)	15,50	16,00
Energia (kcal/kg)	3260	3360
P(%)	0,50	0,52
CA/P	1,30	1,40
Farelo de Trigo (%)	0,00	15,00
Farinha de Carne (%)	0,00	3,00
Farinha de Sangue (%)	0,00	2,00
Lisina (%)	0,69	Sem limite
Sal(%)	0,50	0,50
Mistura A (%)	0,10	0,10
Mistura B (%)	0,10	0,10

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Formulação do problema

Função objetivo (*minimizar custo total de 1 kg da mistura*):

$$\text{Min } C = 1,80 \text{ Milho} + 4,20 \text{ Fsoja} + 2,00 \text{ Ftrigo} + 7,50 \text{ Fcarne} + 9,00 \text{ Fsan} + 14,50 \text{ Foscica} + 0,80 \text{ Calca} + 3,00 \text{ Sal} + 28,00 \text{ MistA} + 145,00 \text{ MistB}$$

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Formulação do problema

Restrições - exigências nutricionais que devem contabilizar as contribuições devidas de cada alimento:

- Proteína: $15,50 \leq 8,51 \text{ Milho} + 45,60 \text{ Fsoja} + 15,30 \text{ Ftrigo} + 45,20 \text{ Fcarne} + 80,90 \text{ Fsan} \leq 16,00$
- Energia: $3260 \leq 3493 \text{ Milho} + 3378 \text{ Fsoja} + 2103 \text{ Ftrigo} + 2133 \text{ Fcarne} + 2809 \text{ Fsan} \leq 3360$
- Cálcio: $0,02 \text{ Milho} + 0,36 \text{ Fsoja} + 0,12 \text{ Ftrigo} + 11,6 \text{ Fcarne} + 0,2 \text{ Fsan} + 22,61 \text{ Fosbica} + 37 \text{ Calca} = \text{Ca}$
- Fósforo: $0,27 \text{ Milho} + 0,55 \text{ Fsoja} + 0,88 \text{ Ftrigo} + 5,4 \text{ Fcarne} + 0,15 \text{ Fsan} + 17,03 \text{ Fosbica} = \text{P}$ e $0,5 \leq \text{P} \leq 0,52$
- Lisina: $0,23 \text{ Milho} + 2,87 \text{ Fsoja} + 0,57 \text{ Ftrigo} + 2,28 \text{ Fcarne} + 6,57 \text{ Fsan} \geq 0,69$

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Formulação do problema

Restrições - exigências nutricionais que devem contabilizar as contribuições devidas de cada alimento:

- $F_{\text{trigo}} \leq 0,15$
- $F_{\text{carne}} \leq 0,03$
- $F_{\text{san}} \leq 0,02$
- $\text{Sal} = 0,005$
- $\text{MistA} = 0,001$
- $\text{MistB} = 0,001$
- Ca/P: $\text{Ca} - 1,30 \text{ P} \geq 0$
 $\text{Ca} - 1,40 \text{ P} \leq 0$
- Peso total: $\text{Milho} + F_{\text{soja}} + F_{\text{trigo}} + F_{\text{carne}} + F_{\text{san}} + F_{\text{sobica}} + \text{Calca} + \text{Sal} + \text{MistA} + \text{MistB} = 1$

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

Solução:

- Milho = 0,717 kg
 - Fsoja = 0,149 kg
 - Ftrigo = 0,094 kg
 - Fcarne = 0,026 kg
 - Fsan = 0 kg
 - Fosbica = 0 kg
 - Calca = 0,007 kg
 - Sal = 0,005 kg
 - MistA = 0,001 kg
 - Mist B = 0,001 kg
-
- C = \$ 2,493322

EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO DO CONCEITO

B) Um fazendeiro está criando frangos e deseja obter uma ração de alto conteúdo proteico, mas de custo mínimo. Os requerimentos mínimos exigidos na composição da ração são: 90 g do nutriente A, 48 g do nutriente B, 20 g do nutriente C e 1,5 g de vitamina X, por quilograma de ração. Ele pode obter esta fórmula com o uso de dois ingredientes: ingrediente 1, que contém 100 g de A, 80 g de B, 40 g de C e 10 g de X (o custo desse ingrediente é estimado em 60 centavos por quilograma); ingrediente 2, que contém 200 g de A, 150 g de B, 20 g de C e nada de X (custa 40 centavos por quilograma). Determinar a formulação mais adequada para 1 kg de ração.

Solução

$$\text{Min } Z = 0,6x_1 + 0,4 x_2$$

Sujeito a

$$100x_1 + 200x_2 \geq 90$$

$$80x_1 + 150x_2 \geq 48$$

$$40x_1 + 20 x_2 \geq 20$$

$$10x_1 \geq 1,5$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Solução $x_1 = 0,15$; $x_2 = 0,85$ e $Z = 0,43$

EXERCÍCIO DE “LIÇÃO DE CASA”

C) Uma determinada fábrica de ração precisa produzir 10.000 t de uma mistura especial a partir dos ingredientes A, B e C, os quais podem ser obtidos no mercado pelos seguintes custos unitários (\$/t): 8.000, 10.000 e 11.000. Sabe-se ainda que a mistura na deve ter mais que 3.000 t de A e não menos que 1.500 t de B e 2.000 t de C.

- i. Formule o problema de tal forma que o custo total da mistura seja o menor possível
- ii. Esquematize a tabela correspondente à primeira iteração do Simplex
- iii. Verifique se a solução “3.000 t de A, 5.000 t de B e 2.000 t de C” faz sentido; identifique as restrições atuantes do problema
- iv. Caso se considere a formulação da mistura apenas a partir da utilização dos ingredientes B e C, calcule o valor do preço sombra associado à restrição de peso da ração.

Referências

- BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa operacional**: para cursos de administração, contabilidade e economia. Rio de Janeiro: Elsevier-Campus, 2012.
- CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais**. São Paulo: Atlas, 2015.