UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de Lorena - EEL

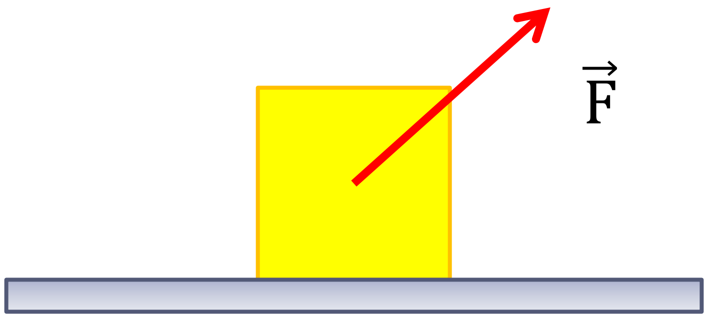
1. Espaços Vetoriais

LOB 1037 – Álgebra Linear

Profa. Paula C P M Pardal

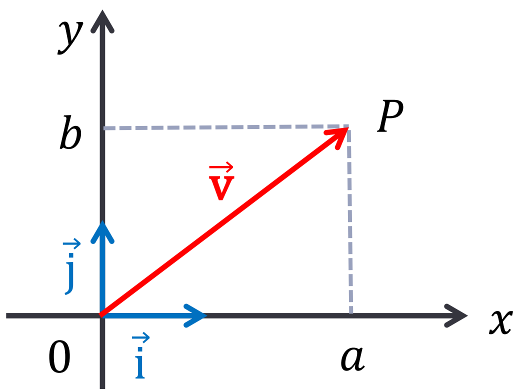
1. Introdução

- Imagine uma força atuando sobre um corpo.
  - Conhecidos: intensidade, direção e sentido dessa força ➔ possível determiná-la e representá-la por um vetor ➔ ***Grandeza Vetorial***.



- Em Álgebra Linear, o conceito de ***vetor*** será desenvolvido de ***forma bem mais ampla*** e soluções de sistemas de eqs. lineares ou de eqs. diferenciais também poderão ser obtidas e representadas por vetores.

- Considere o plano cartesiano Oxy.



- Fixada uma unidade de comprimento, um ponto P do plano pode ser identificado com o par (a, b) de n. reais, que são suas ***coordenadas***.

- O ponto $P(a, b)$ pode ser identificado com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, sendo O a origem do plano Oxy.

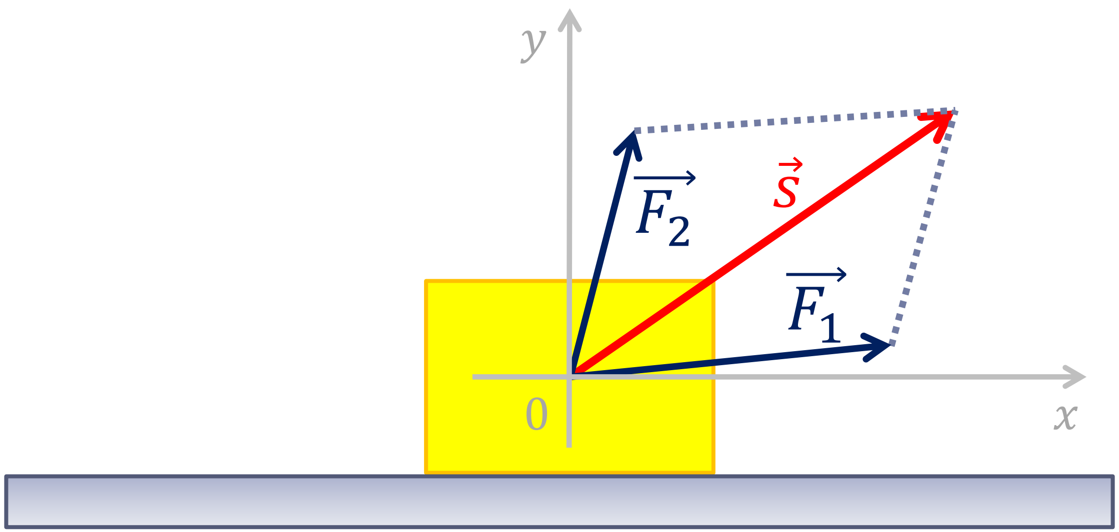
- Assim, a cada ponto $P(a, b)$ do plano está associado um único vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e, reciprocamente: dado um vetor, associa-se um único ponto do plano ➔ ***correspondência biunívoca***.

Observação: $\mathbb{R}^3$ ➔ o ponto P tem coordenadas (a, b, c) e $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

1) ADIÇÃO DE VETORES

- ***Voltando ao bloquinho*:** se a origem do plano cartesiano estiver no ponto de aplicação da força, essa pode ser representada por um vetor de comprimento equivalente à intensidade da força, com mesma direção e mesmo sentido em que ela atua.
- Suponha agora que duas forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ atuam no referido objeto.
  - É possível representar essas duas forças através de uma única força resultante $\vec{s}$? Sim, por meio da ***soma*** dessas duas forças. Mas o que significa soma de duas forças?

- A força resultante $\vec{s}$ é representada pela ***diagonal maior*** do paralelogramo construído a partir dos vetores que representam $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, denotada por: $\vec{s} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.



- Em termos de coordenadas:

$$\text{Se } \overrightarrow{F_1} = (a_1, b_1) \text{ e } \overrightarrow{F_2} = (a_2, b_2) \Rightarrow \vec{s} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2);\ \vec{s} \in \mathbb{R}^2.$$

2) MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR ESCALAR

- Multiplicar um vetor por um escalar α $(\alpha \in \mathbb{R})$, gera um novo vetor, cujas características dependem do intervalo em $\mathbb{R}$ ao qual o escalar pertence:
  - Se $\alpha > 0$ então $\vec{p} = \alpha\vec{v}$ será um vetor com mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$, e comprimento α vezes o comprimento de $\vec{v}$.
  - Se $\alpha < 0$ então $\vec{p} = \alpha\vec{v}$ será um vetor com mesma direção de $\vec{v}$, sentido contrário a $\vec{v}$ e comprimento α vezes o comprimento de $\vec{v}$.
  - Se $\alpha = 0$ então $\vec{p} = \alpha\vec{v}$ será o vetor nulo, $\vec{0}$.
- Em coordenadas: se $\vec{v} = (a, b)$ ➔ $\vec{p} = \alpha\vec{v} = (\alpha a, \alpha b)$; $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$.

Observação: $\mathbb{R}^3$

- Adição de Vetores:
  - Para $\overrightarrow{F_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{F_2} = (a_2, b_2, c_2)$ ➔ $\vec{s} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$; $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$.
- Multiplicação de Vetor por Escalar:
  - Para $\vec{v} = (a, b, c)$ ➔ $\vec{p} = \alpha\vec{v} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$; $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

1.3 Axiomas

- As operações adição de vetores e multiplicação por escalar, no plano e no espaço, apresentam uma série de axiomas decorrentes das operações com n. reais:

A_1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

A_2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

A_3. Existe somente um vetor nulo, $\vec{0}$, tal que, $\forall\,\vec{v}$ tem-se: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$

A_4. $\forall\,\vec{v}$, existe somente um vetor $-\vec{v}$ tal que: $\vec{v}+(-\vec{v})=-\vec{v}+\vec{v}=\vec{0}$ $(\vec{v}\in\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$

M_1. $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$ $\quad(a,b\in\mathbb{R})$

M_2. $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$ $\quad(a,b\in\mathbb{R})$

M_3. $(ab)\vec{u}=a(b\vec{u})=b(a\vec{u})$ $\quad(a,b\in\mathbb{R})$

M_4. $1\vec{u}=\vec{u}$

DEFINIÇÃO:

- Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual se definem operações de adição e de multiplicação por escalar:

$$\begin{cases} \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} \in V \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\vec{v} \in V \end{cases}$$

- O conjunto V com essas operações é chamado ***Espaço Vetorial Real*** se os oito axiomas, de A_1 a M_4, forem verificados.

***Observações*:**

- Se na definição acima, os números forem complexos ao invés de reais, V será um ***Espaço Vetorial Complexo***.
- Um elemento de um espaço vetorial é chamado de ***vetor***, independente da sua natureza.

2.1 Exemplos de Espaços Vetoriais

1) O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2);\ x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial real (**EV**) de acordo com as operações de adição e de multiplicação por escalar assim definidas:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

Nota*:** Essas são as ***operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Definindo $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ e $\vec{w} = (z_1, z_2)$, os oito axiomas de EV se verificam.

2) Os conjuntos $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ... , $\mathbb{R}^n$ são EVs de acordo com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar.

3) O conjunto $V = M(m,n)$ das matrizes retangulares $m \times n$ é um EV, de acordo com as operações usuais.

Atenção: O conjunto $V = M(n,n)$ das matrizes quadradas de ordem n é um EV em relação às mesmas operações.

4) O conjunto $V = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(a_i x^i\right) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo, são EVs, de acordo com as operações usuais.

5) O conjunto $V = \mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ das funções reais contínuas de uma variável é um EV, em relação às operações usuais.

Observação: Se $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definem-se:

$$x \in \mathbb{R} \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$x \in \mathbb{R} \to (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Contraexemplo: não é EV

- O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ não é um EV em relação às seguintes operações de adição e de multiplicação por escalar:

  - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
  - $k(a, b) = (ka, b), k \in \mathbb{R}$

Falha o axioma A_4.

2.2 Propriedades dos Espaços Vetoriais

I. Existe um único vetor nulo, $\vec{0}$, em V (elemento neutro da operação de adição).

II. Cada vetor $\vec{v} \in V$ admite apenas um vetor simétrico $(-\vec{v}) \in V$.

III. Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, se $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

IV. $\forall\, \vec{v} \in V$, tem-se que $-(-\vec{v}) = \vec{v}$.

V. Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in V$, existe um e somente um $\vec{r} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{r} = \vec{v} \therefore \vec{r} = \vec{v} - \vec{u}$.

VI. $\forall\, \vec{v} \in V$, tem-se que $0\vec{v} = \vec{0}$.

VII. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

VIII. $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ implica $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

IX. $\forall\, \vec{v} \in V$, tem-se que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

X. Para quaisquer $\vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que: $(-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$

EXERCÍCIOS

Determine se cada um dos conjuntos dados, de acordo com as operações de adição e de multiplicação por escalar definidas, é um EV. Caso não seja, justifique.

1) O conjunto $V = \{(x_1, x_2); x_1 x_2 \geq 0\}$, de acordo com as operações usuais.

Não (falha 1º requisito - solução geométrica)

2) O conjunto $V = \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbb{R}\}$, de acordo com as operações:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (kx_1, 0)$$

Não (falham axiomas A_2, A_3, A_4, M_2, M_4)

TEOREMA I:

Um subconjunto S, ***não vazio***, de um espaço vetorial V $(S \subset V)$, será um subespaço vetorial (**SEV**) de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

I. Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in S$, tem-se que $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
II. Para quaisquer $\vec{u} \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $\alpha\, \vec{u} \in S$.

Sendo válidas essas duas condições em S, os oito axiomas de EV se verificam em S.

Observação*:** todo EV V admite ao menos dois SEVs: o conjunto $\{\vec{0}\}$, subespaço zero ou nulo, e o próprio espaço vetorial V. Estes são os ***subespaços triviais de V; os demais são denominados ***subespaços próprios*** de V.

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$ ➔ subespaços triviais: $\{(0,0,0)\}$ e o próprio $\mathbb{R}^3$.
➔ subespaços próprios: retas e planos que passam pela origem.

Exemplos de SEVs

- $V = \mathbb{R}^2$ ➔ SEV: a reta que passa pela origem $S = \{(x, y);\ y = 2x\}$.
  - São também SEVs do $\mathbb{R}^2$: a origem ($\{(0,0)\} \rightarrow$ SEV zero ou nulo); todas as retas que passam pela origem; e o próprio $\mathbb{R}^2$.
- $V = \mathbb{R}^3$ ➔ SEVs: a origem (SEV zero ou nulo); as retas e planos que passam pela origem; e o próprio $\mathbb{R}^3$.
- $V = \mathbb{R}^5$ ➔ SEV: $S = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \mathbb{R}\}$.
- $V = M(n, n)$ ➔ SEV: $S = \left\{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\ a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$, o conjunto das matrizes triangulares superiores.

Contraexemplos: não são SEVs

- $V = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ a reta $S = \{(x, 4 - 2x); x \in \mathbb{R}\}$ ➔ não é um SEV.
- $V = \mathbb{R}^2 \rightarrow S = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$ ➔ não é um SEV.
- $V = M(n, n) \rightarrow S$: subconjunto de todas as matrizes em que $a_{11} \leq 0$ ➔ não é um SEV.

3. Combinação Linear

DEFINIÇÃO:

- Sejam os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ de um EV V e os escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$). Qualquer vetor $\vec{v} \in V$ da forma:

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$$

é chamado ***combinação linear*** (**CL**) dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$.

***Exemplos*:**

1) No EV $V = P_2(x)$, dos polinômios de grau ≤ 2, $p = -26 + 11x + 7x^2$ ➔ CL dos polinômios $p_1 = 2 - 3x + 5x^2$ e $p_2 = -8 + 5x - 2x^2$ ($p = 3p_1 + 4p_2$).

2) Modelo de cores nas telas dos monitores ➔ modelo RGB.

- Seja V um EV. Considere um conjunto $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\} \subset V, A \neq \emptyset$.
- O conjunto S de todos os vetores de V que são CL dos vetores de A é um SEV de V. ***Em outras palavras*:** a característica do SEV S é ser CL de um número finito de vetores do conjunto A. Definindo-se $\vec{u}, \vec{v} \in S$, tem-se:

$$\vec{u} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$$

$$\vec{v} = b_1\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + b_n\overrightarrow{v_n}$$

- De fato, S é um SEV de V, pois a soma $\vec{u} + \vec{v}$ e a multiplicação por escalar $\alpha\vec{u}$ são CL de vetores de A:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\overrightarrow{v_1} + (a_2 + b_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (a_n + b_n)\overrightarrow{v_n} \therefore \vec{u} + \vec{v} \in S$
  - $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1)\overrightarrow{v_1} + (\alpha a_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\alpha a_n)\overrightarrow{v_n} \in S \therefore \alpha\vec{u} \in S$

- Simbolicamente, o subespaço S pode ser escrito como:

$$S = \{\vec{v} \in V \;/\; \vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}; a_i \in \mathbb{R}\}$$

Observação:

- O SEV S é dito *gerado* pelos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$, ou gerado pelo conjunto A, e se representa como:

$$S = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}] \qquad \text{ou} \qquad S = G(A)$$

- Os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ são chamados *geradores* do subespaço S, enquanto A é o *conjunto gerador* de S.

Exemplo

- Os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$ e $\vec{j} = (0,1,0)$ do EV $V = \mathbb{R}^3$ geram o subespaço

$$S = \{(x, y, 0);\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

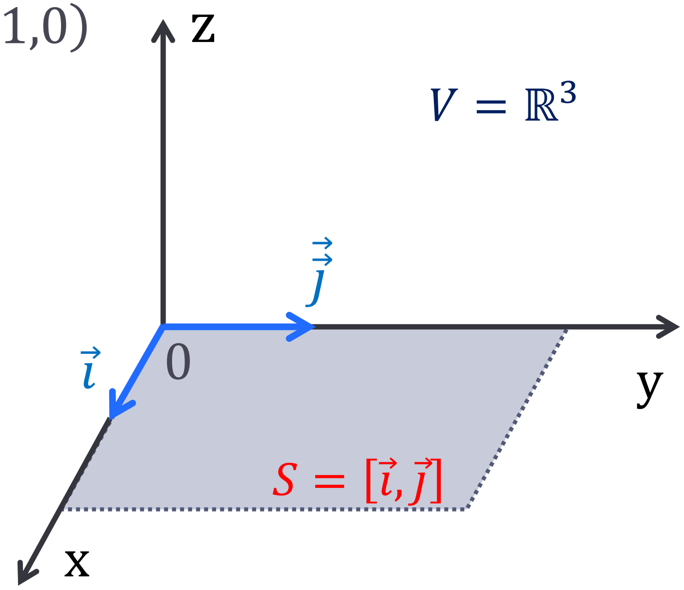
pois:

$$(x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

Então $S = [\vec{i}, \vec{j}]$ é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$ e,

geometricamente, representa o plano coordenado

Oxy.



3.2 Espaços Vetoriais Finitamente Gerados

- Um EV V é ***finitamente gerado*** se existe um conjunto finito A, $A \subset V$, tal que $V = G(A)$.

***Exemplos*:**

1) O EV $V = \mathbb{R}^3$ é finitamente gerado por um conjunto de 3 vetores:

$$A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \therefore \ \mathbb{R}^3 = G(A)$$

2) O EV $V = M(2,2)$ é gerado por um conjunto finito de 4 vetores:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \therefore \ M(2,2) = G(A)$$

***Observação*:** O EV $V = P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ de todos os polinômios, não é gerado pelo conjunto finito de n vetores $A = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$.

EXERCÍCIOS

1) Considere no EV $V = P_2(x) = \{ax^2 + bx + c\ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ os vetores $p_1 = 1 - 2x + x^2$, $p_2 = 2 + x$ e $p_3 = -x + 2x^2$.

   a) Escreva o vetor $p = 7 - 5x + 5x^2$ como CL de p_1, p_2 e p_3. $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$

   b) Escreva o vetor $p = 7 - 5x + 5x^2$ como CL de p_1 e p_2. Não é possível.

   c) Determine uma condição para a, b e c, de modo que o vetor $p = ax^2 + bx + c$ seja CL de p_2 e p_3. $a + 2b - c = 0$

   d) É possível escrever p_1 como CL de p_2 e p_3? Não.

2) Determine os subespaços do $\mathbb{R}^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:

   a) $A = \{(2, -1, 3)\}$. $S = \{(-2y, y, -3y); y \in \mathbb{R}\}$

   b) $A = \{(-1,1,0), (0,1,-2), (-2,3,1)\}$. $S = V = \mathbb{R}^3$

   c) $A = \{(1,0,1), (0,1,1), (-1,1,0)\}$. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$

DEFINIÇÃO:

i. Sejam um EV V e um conjunto $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$, $A \subset V$. Considere a equação:

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

Sabe-se que a eq. (1) admite ao menos uma solução: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, chamada *solução trivial*.

ii. O conjunto A será **linearmente independente (LI)**, ou os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ serão LI, se a eq. (1) admitir apenas a solução trivial (todos $a_i = 0$). Se existirem outras soluções, para ao menos um $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$, o conjunto A será **linearmente dependente (LD)**, ou os vetores $\overrightarrow{v_i}, i = 1, \cdots, n$, serão LD.

Exemplos

i. No EV $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $\overrightarrow{v_1} = (2, -1,3)$, $\overrightarrow{v_2} = (-1,0, -2)$ e $\overrightarrow{v_3} = (2, -3,1)$ formam um conjunto LD, pois $3\overrightarrow{v_1} + 4\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ $\therefore$ $\exists\ a_i \neq 0$.

ii. No EV $V = \mathbb{R}^3$, o conjunto $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, tal que $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ é LI, pois admite apenas a solução trivial $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

iii. No EV $V = \mathbb{R}^2$, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que estiverem sobre a mesma reta, que passa pela origem, são LD.

iv. No EV $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ que estiverem contidos no mesmo plano, que passa pela origem, são LD.

v. No EV $V = \mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ das funções reais contínuas de uma variável:

a) $f_1 = x$ e $f_2 = \text{sen}(x)$ são LI;

b) $g_1 = \text{sen}(2x)$ e $g_2 = \text{sen}(x)\cos(x)$ são LD.

TEOREMA II:

- Um conjunto $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores do conjunto é combinação linear dos outros.

***Observação*:**

O Teorema II pode ser assim enunciado:

Um conjunto $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI se, e somente se, nenhum dos vetores do conjunto é CL dos outros.

Propriedades

Sejam um EV V e um conjunto $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$, $A \subset V$.

I. Se $A = \{\vec{v}\} \subset V$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então A é LI.

II. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD.

III. Se uma parte A_1 de um conjunto $A \subset V$ é LD, então A também é LD.

IV. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A também é LI.

V. Se $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\} \subset V$ é LI e $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}, \vec{w}\} \subset V$ é LD, então $\vec{w}$ é CL de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$.

EXERCÍCIOS

1) Verifique se o seguinte conjunto de vetores pertencente ao EV $V = P_2(x)$ é LD ou LI:

$$A = \{2 + x - x^2, -4 - x + 4x^2, x + 2x^2\}$$

LD

2) Seja V o EV das funções reais de uma variável, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifique se o conjunto $A = \{f(t), g(t), h(t)\}$, em que $f(t) = \operatorname{sen}(t)$, $g(t) = \cos(t)$ e $h(t) = t$ é LI ou LD.

LI

3) Determine k para que o conjunto $A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\right\}$ seja LD. $k = 3$

DEFINIÇÃO:

- Um conjunto $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$, $B \subset V$, será uma base de um espaço vetorial V se:

  I. B é LI.

  II. B gera V.

***Exemplos*:**

1) $B = \{(1,1), (-1,0)\}$ é base do $V = \mathbb{R}^2$.

2) $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é a base canônica do $V = M(2,2)$.

***Observação*:** Todo conjunto LI de um EV V é base do SEV por ele gerado.

Proposição:

Se um conjunto $C = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ gera um espaço vetorial V, qualquer conjunto $C' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \cdots, \overrightarrow{w_m}\}$ com mais elementos que C $(m > n)$, será LD.

***Exemplo*:**

$V = P_3(x)$ ➔ $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $C' = \{1 + x, 1 - x^2, 4 + x + 3x^2 - x^3, 2x^2 - x^3, 8 - 2x^2 + x^3\}$.

TEOREMA III:

Todas as bases de um espaço vetorial V têm o mesmo número de elementos.

***Prova*:**

Considere duas bases distintas A e B, inicialmente com n e m elementos, respectivamente.

DEFINIÇÃO:

- O número de elementos da base de um espaço vetorial V é chamado dimensão de V e denotado por $\dim(V)$.

i. Se V possui uma base com n vetores ➔ $\dim(V) = n$;

ii. Se V possui uma base com infinitos vetores ➔ $\dim(V) = \infty$.

iii. Se um conjunto V não possui base ➔ V não é EV ➔ $\nexists \dim(V)$.

Exemplos: $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^n$; $M(m,n)$; $M(n,n)$; $P_n(x)$; $P(x)$.

Como determinar se um conjunto é base de um EV?

- Sabe-se que um conjunto B é base de um EV V se B for LI e gerar V. No entanto, se for conhecida $\dim(V) = n$, para obter uma base de V basta satisfazer uma das condições, pois a outra ocorrerá automaticamente. Assim:

1) Se $\dim(V) = n$, qualquer conjunto de V com n vetores LI é uma base de V.

2) Se $\dim(V) = n$, qualquer conjunto de V com n vetores que geram o EV é uma base de V.

***Exemplo*:** $V = P_3(x)$ ➔ $B = \{1, 1 - x, x - x^2, x^3\}$ é base, pois B é LI, possui, 4 elementos e $\dim(V) = 4$.

TEOREMA IV:

Seja $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ uma base de um EV *V*. Todo vetor $\vec{v} \in V$ se exprime de maneira única como CL dos vetores de *B*: $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$.

➔ *Os n. reais $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são chamados componentes ou coordenadas de $\vec{v}$ em relação aos vetores da base B e são representados como:*

$$\overrightarrow{v_B} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{v_B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

***Exemplo*:**

No $V = P_2(x)$, considere as bases $A = \{1, x, x^2\}$, $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ e $C = \{2, 1 - x, 1 + x^2\}$. Dado o vetor $p = 8 + 6x - 3x^2$, encontre: p_A; p_B; e p_C.

EXERCÍCIOS

1) Sejam os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,2,3)$; $\overrightarrow{v_2} = (0,1,2)$; e $\overrightarrow{v_3} = (0,0,1)$.

   a) Mostre que o conjunto $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é uma base do EV $V = \mathbb{R}^3$. Utilize a definição de base.

   b) Dado $\vec{v} = (5,4,2)$, determine $\overrightarrow{v_B}$.

   $\overrightarrow{v_B} = (5, -6, -1)$

2) O conjunto $B = \{x^3, 3 - x + 2x^2, -1 + 4x - 3x^2 + x^3\}$ é base de $V = P_3(x)$? Justifique.

   Não. $G(B) \neq P_3(x)$.

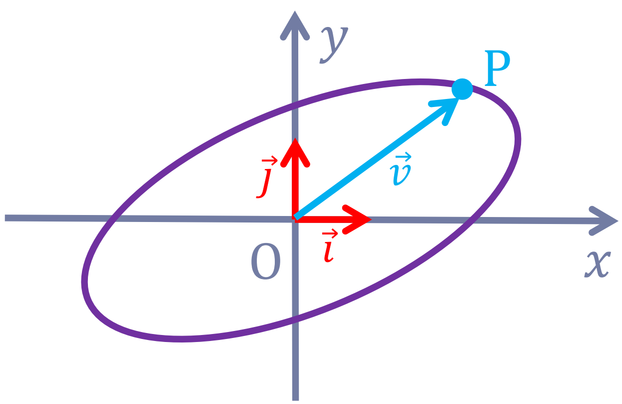
3) Determine a dimensão e uma base do subespaço vetorial S assim definido: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, 2x + y + z = 0\}$.

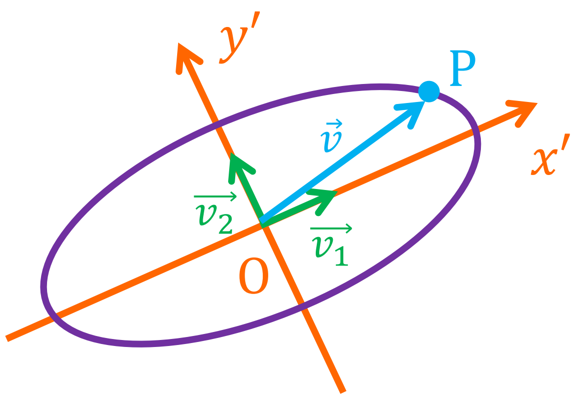
   $\dim(S) = 2$; $B = \{(1, -2, 0), (0, -1, 1)\}$

4) Seja V o EV das matrizes simétricas 2×2. Mostre que $\dim(V) = 3$.

6. Mudança de Base

- Existem situações em que um problema (de cinemática ou de estática, por exemplo) torna-se mais simples de resolver se for escolhido um referencial adequado para descrever o movimento.
  - ***Exemplo*:** um corpo se move no plano Oxy em uma trajetória descrita pela elipse de equação $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Neste caso, a descrição do movimento se torna mais simples se for escolhido um referencial $Ox'y'$ cujos eixos se apoiam nos eixos principais da elipse. Nesse referencial, a equação da elipse será reescrita como $\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 1$.





***Questão*:** uma vez escolhido o sistema de referência, qual a relação entre as coordenadas de um ponto P no antigo referencial e suas coordenadas no novo referencial?

- Sejam $A = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ e $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$ bases de um EV V. Pretende-se relacionar as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em relação à base A com as coordenadas do mesmo vetor $\vec{v}$ em relação à base B.

- Dado um vetor $\vec{v} \in V$, é possível escrevê-lo como CL dos vetores das bases A e B:

$$\vec{v} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n} \qquad (1) \qquad \text{ou} \qquad [\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = y_1\overrightarrow{w_1} + y_2\overrightarrow{w_2} + \cdots + y_n\overrightarrow{w_n} \qquad (2) \qquad \text{ou} \qquad [\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Por sua vez, os vetores da base A podem ser escritos como CL dos vetores da base B, isto é:

$$\overrightarrow{u_1} = a_{11}\overrightarrow{w_1} + a_{21}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{n1}\overrightarrow{w_n}$$
$$\overrightarrow{u_2} = a_{12}\overrightarrow{w_1} + a_{22}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{w_n}$$
$$\vdots \qquad (3)$$
$$\overrightarrow{u_n} = a_{1n}\overrightarrow{w_1} + a_{2n}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{w_n}$$

- Substituindo as eqs. (3) na eq. (1) e agrupando em termos dos vetores da base B, $\overrightarrow{w_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, tem-se:

$$\vec{v} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\,\overrightarrow{w_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\,\overrightarrow{w_2} + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\,\overrightarrow{w_n} \qquad (4)$$

- Comparando as eqs. (4) e (2):

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

- E, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$, ou simplesmente: $[\vec{v}]_B = [I]_B^A [\vec{v}]_A$

- Sendo a matriz $[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ chamada *Matriz de Mudança de Base de A para B*.

- Note que o papel da matriz mudança de base é relacionar as componentes de qualquer vetor $\vec{v}$ na base A com as correspondentes coordenadas desse mesmo vetor $\vec{v}$ na base B.

Observações

1) Comparando a matriz $[I]_B^A$ com a eq. (3), observa-se que cada coluna, *tomada nesta ordem* $(i = 1, \cdots, n)$, é formada pelos componentes da CL dos vetores da base A, obtidos em relação aos vetores da base B, isto é:

$$[\overrightarrow{u_1}]_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; \; [\overrightarrow{u_2}]_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}; \cdots ; \; [\overrightarrow{u_n}]_B = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

2) A matriz $[I]_B^A$ é também conhecida como matriz de transição de A para B.

3) A matriz $[I]_B^A$ transforma os vetores LI da base A nos vetores LI da base B, e por isso, é inversível.

Assim, da equação

$$[\vec{v}]_B = [I]_B^A[\vec{v}]_A$$

pode-se obter

$$[\vec{v}]_A = \left([I]_B^A\right)^{-1}[\vec{v}]_B$$

de onde se conclui que:

$$\left([I]_B^A\right)^{-1} = [I]_A^B$$

Isto é*: a inversa da matriz mudança de base de A para B é a matriz mudança de base de B para A.*

EXERCÍCIOS

1) Considere as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$: $A = \{(1,1),(0,-1)\}$ e $B = \{(2,-3),(-3,5)\}$:

a) Determine a matriz mudança de base$[I]_B^A$; $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

b) Utilize a matriz obtida em (a) para calcular $\vec{v}_B$, dado $\vec{v}_A = (2,3)$; $\vec{v}_B = (7,4)$

c) Determine a matriz mudança de base de B para A. $[I]_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

2) Se $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine $[\vec{v}]_A$, sabendo que $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. $[\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$