MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 5 (17/09/2020)

Conjuntos limitados

Na última aula vimos as definições abaixo:

Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$ um subconjunto não vazio.

Definição. Dizemos que A é *limitado superiormente* se existir um elemento $M \in K$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. Tal elemento M é chamado *majorante* ou *cota superior* de A.

Definição. Dizemos que A é *limitado inferiormente* se existir um número $N \in K$ tal que $a \geq N, \forall a \in A$. O número N é chamado *minorante* ou *cota inferior* de A.

Definição. Se A for limitado superior e inferiormente, dizemos simplesmente que A é *limitado*. Nesse caso, existem M e N tais que $N \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Exemplos:

1. No corpo ordenado $\mathbb{Q}$, o conjunto $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$, formado pelos números primos entre 10 e 40, é limitado. Por quê?
   - Quantos majorantes e minorantes tem esse conjunto?
   - Qual é o menor dos majorantes?
   - Qual é o maior dos minorantes?
2. Todo conjunto finito (ou seja, com uma quantidade finita de elementos) é limitado. Por quê?
3. $B = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots \right\} \subset \mathbb{Q}$ é limitado?

Conjuntos limitados

4. $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$
   - C é limitado superiormente? Por quê?
   - C é limitado inferiormente? Por quê?
   - Existe o maior dos minorantes de C?

5. $D = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} \subset \mathbb{Q}$
   - D é limitado inferiormente? Por quê?
     - Como $\frac{n}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, D é limitado inferiormente e 0 é um minorante de D.
   - D é limitado superiormente? Por quê?
     - Como $n < n+1, \forall n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, o que nos permite concluir que D é limitado superiormente e 1 é um majorante de D.

Supremo e ínfimo de um conjunto

Seja K um corpo ordenado.

Definição. Seja $A \subset K$ um conjunto não vazio, limitado superiormente. Se existir $s \in K$ que é o menor dos majorantes de A, diremos que s é o <u>supremo de A</u>.
Notação: $s = \sup A$

Definição. Seja $A \subset K$ um conjunto não vazio, limitado inferiormente. Se existir $i \in K$ que é o maior dos minorantes de A, diremos que i é o <u>ínfimo de A</u>
Notação: $i = \inf A$

Supremo e ínfimo de um conjunto

Exemplos:

1. Já vimos que o conjunto $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subset \mathbb{Q}$ é limitado.

   $$\inf B = 0$$

   $$\sup B = 1$$

   Note que, neste exemplo, $\sup B \in B$ e $\inf B \notin B$.

2. $D = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\} \subset \mathbb{Q}$

   $$\inf D =$$

   $$\sup D =$$

Supremo e ínfimo de um conjunto

Um número s é supremo de A se e somente se as duas afirmações a seguir forem verdadeiras:

(a) s é um majorante de A, isto é, $a \leq s, \forall a \in A$;

(b) s é o menor majorante de A, isto é, se M é um majorante qualquer de A, então $s \leq M$.

Um número i é ínfimo de A se e somente se as duas afirmações a seguir forem verdadeiras:

(c) i é um minorante de A, isto é, $i \leq a, \forall a \in A$;

(d) i é o maior minorante de A, isto é, se N é um minorante de A, então $N \leq i$.

Supremo

Vocês concordam com a seguinte formulação?

“Seja $A \subset K$ um conjunto limitado e s um majorante de A.
s é o menor dos majorantes de A se nenhum número menor do que s pode ser majorante de A”.

Como transformar essa ideia em uma formulação mais fácil de ser demonstrada matematicamente?

“Seja $A \subset K$ um conjunto limitado e s um majorante de A.
s é o menor dos majorantes de A se, para cada $x \in K$ tal que $x < s$ existe $a \in A$ tal que $x < a$.

Um número $s \in K$ é supremo de A se e somente

(a) $a \leq s, \forall a \in A$, e

(b') dado $x \in K$ tal que $x < s$, existe $a \in A$ tal que $x < a$.

Ínfimo

Tente escrever agora para ínfimo, o análogo da última formulação para o significado de supremo:

Um número $i \in K$ é ínfimo de A se e somente

(c) $i \leq a, \forall a \in A$, e

(d') dado $y \in K$ tal que $y > i$ então existe $a \in A$ tal que $a < y$.

Exemplo 1

$A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 4\} \subset \mathbb{Q}$

- A é não vazio.
- A é limitado superiormente e $M = 4$ é um majorante de A (pois $x < 4, \forall x \in A$)
- $\sup A = 4$

  Para provar isso, vamos mostrar que 4 satisfaz (b')

  - Seja $\overline{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $\overline{x} < 4$.

    Precisamos mostrar que $\overline{x}$ não é majorante de A.
  - Tome m como a média aritmética entre $\overline{x}$ e 4: $m = \frac{\overline{x}+4}{2}$.
    - (i) $m \in \mathbb{Q}$
    - (ii) $m < 4$ (pois $\overline{x} < 4 \Rightarrow \overline{x} + 4 < 4 + 4 \Rightarrow \frac{\overline{x}+4}{2} < 4$) e, portanto, $m \in A$.
    - (iii) $\overline{x} < m$ (por quê?)
  - Conclusão: $\overline{x}$ não é majorante de A. Logo, 4 é o menor dos majorantes de A
- A não é limitado inferiormente. Logo A não admite ínfimo.

Exemplo 2

$B = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\left(B = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots \right\} \right)$

- É claro que B é não vazio.
- B é limitado
  (a) $0 < n < n+1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

  Conclusão: 1 é um minorante de B.

  (b) 2 é um majorante de B. Por quê? ($n+1 \leq n+n$ para todo $n \in \mathbb{N}$)
- Qual o $\sup B$? $\quad \sup B = 2$. $\quad$ Por quê?

  Como $2 \in B$, nenhum número menor do que 2 pode ser majorante de B!
- Qual o $\inf B$? $\quad \inf B = 1$. $\quad$ Por quê?

  Precisamos provar que 1 é o maior dos minorantes de B.

Exemplo 2 (continuação)

$B = \left\{ \frac{n+1}{n} \ : n \in \mathbb{N} \right\}$

Vamos provar que 1 é o maior dos minorantes de B:

Seja $x > 1$, $x \in \mathbb{Q}$.

Precisamos mostrar que existe um elemento $b \in B$ tal que $b < x$. Como procurar $b \in B$ que seja menor do que x?

Podemos escrever $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $p > q$.

Note que $p \geq q + 1$. Tome o número $b = \frac{q+2}{q+1}$. (outra possibilidade, sugerida por um colega, é tomar $b' = \frac{2q+1}{2q} \in B$ e provar que $b' < x$)

- $b \in B$
- $b < x$, pois
$$x - b = \frac{p}{q} - \frac{q+2}{q+1} \geq \frac{q+1}{q} - \frac{q+2}{q+1} = \frac{(q+1)^2 - q(q+2)}{q(q+1)} = \frac{1}{q(q+1)} > 0$$

Conclusão: x não é minorante de B! Portanto, $1 = \inf B$.

Máximo e mínimo de um conjunto

Seja K um corpo ordenado e seja $A \subset K$.

Definição. Um número $m \in A$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$ é chamado *máximo* de A e indicado por $m = \max A$.

Definição. Um número $n \in A$ tal que $n \leq a$ para todo $a \in A$ é chamado *mínimo* de A e indicado por $n = \min A$.

Exemplos:

- $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 5\}$
  $\min A = 1 \qquad \max A = 5$
- $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 5\}$
  $\min B = 1 \qquad \max B = ?$ Não existe máximo de B. (Por quê?)

  B tem supremo? $\sup B = 5$. A demonstração é um exercício.

Exercícios

Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de cada subconjunto dado. Justifique todas as suas afirmações.

1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -2 < x \leq 7\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 5x + 6 < 0\}$
4. $D = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $E = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n} : x \in \mathbb{Q}\right\}$