

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 12

OBJETIVOS: CONTINUAR A DISCUTIR PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES.

(CONT.) 2.6 PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES

(CONT.) → DERIVADA DE UMA DISTRIBUIÇÃO

VIMOS QUE, SE $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

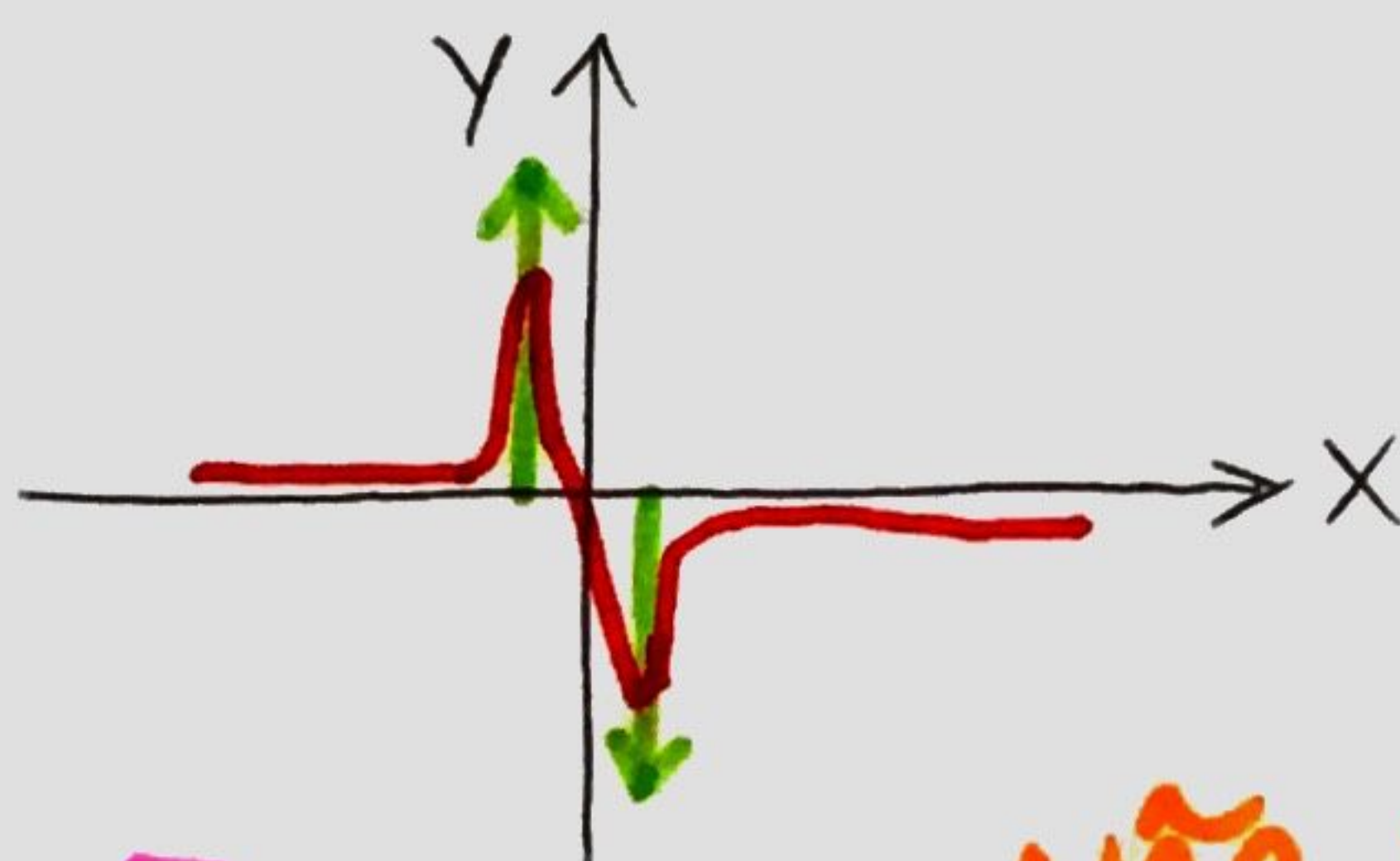
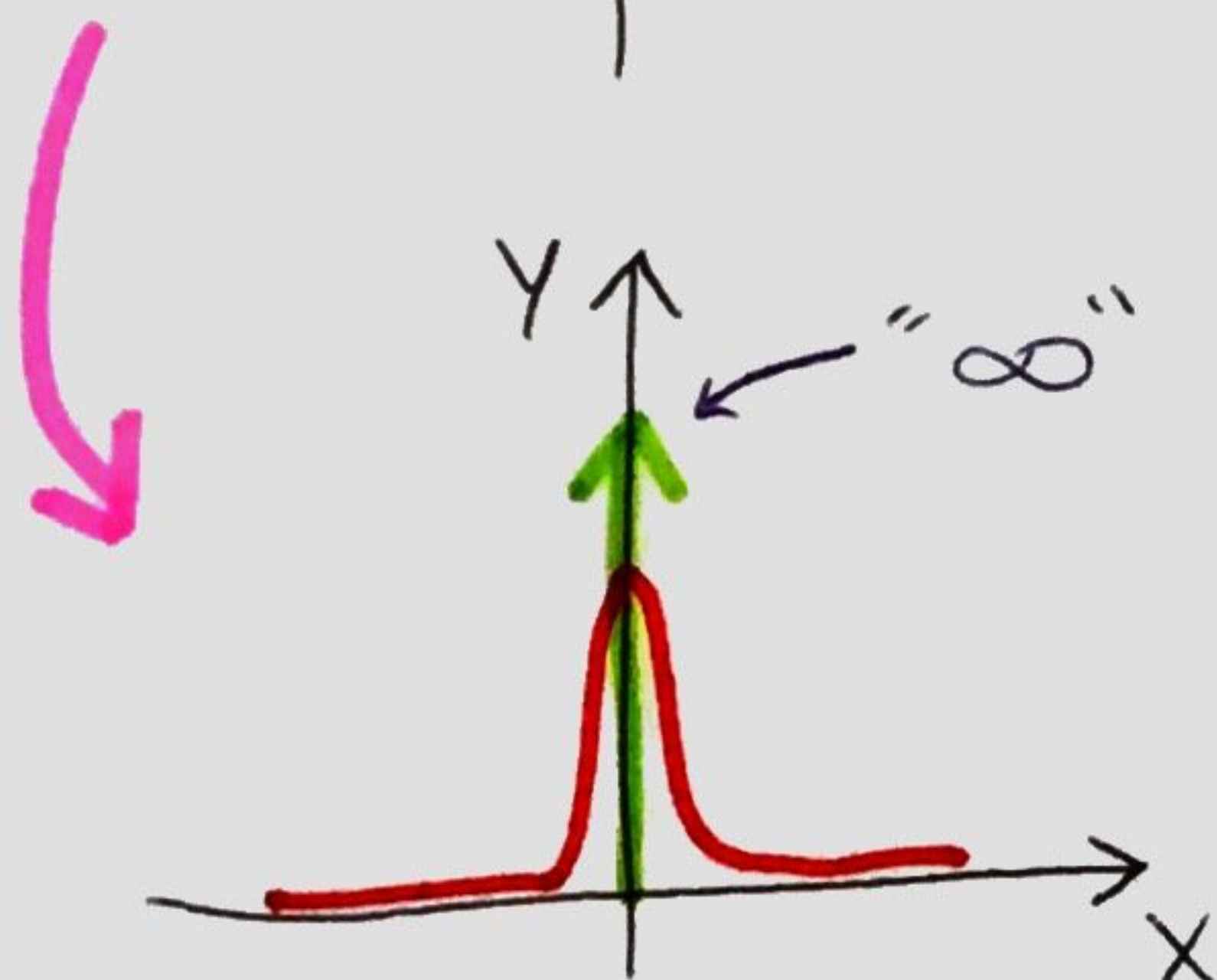
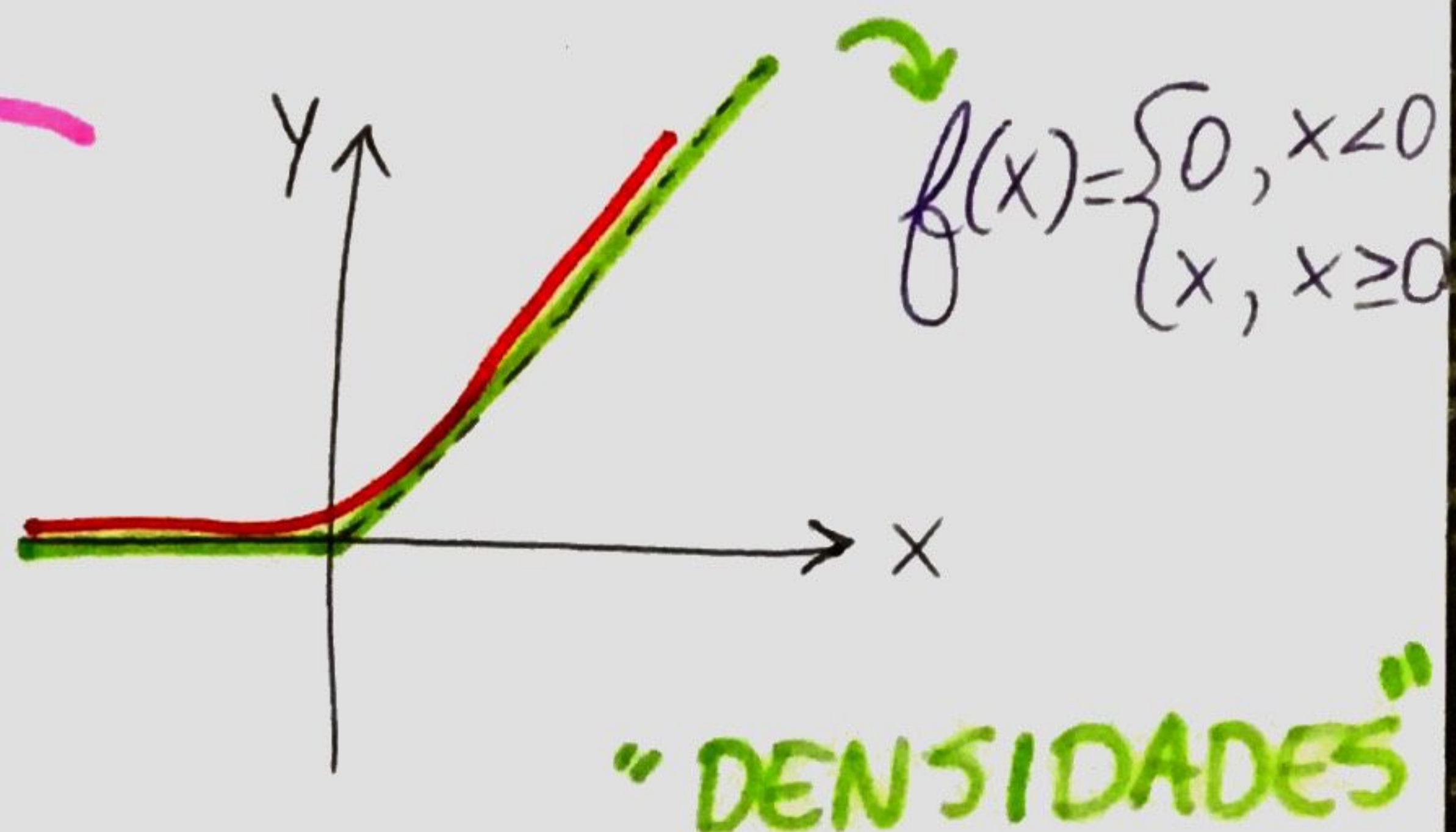
$$\langle T', h \rangle \equiv -\langle T, h' \rangle \quad \text{e} \quad \langle T^{(m)}, h \rangle \equiv (-1)^m \langle T, h^{(m)} \rangle.$$

(CONT.) ◇ EXEMPLOS

(iv) A DERIVADA DA DELTA É O DIPÓLO ELÉTRICO

$$\langle \delta', h \rangle = -\langle \delta, h' \rangle = -h'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) h(x) dx$$

INTUIÇÃO VIA SEQUÊNCIAS:



SUCESSIVAS
DERIVAÇÕES

NÃO DEFINE
A DERIVADA, MAS
↑ ACHA O VALOR.

$$\langle \delta', h \rangle = -h'(0) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h(\frac{\epsilon}{2}) - h(-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} =$$

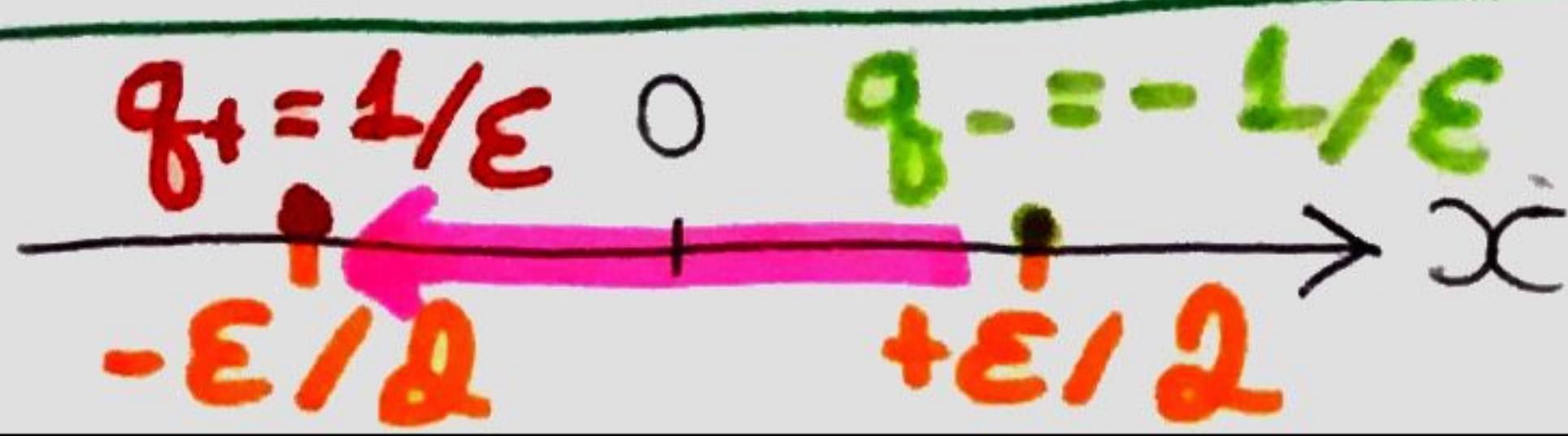
$$= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{\epsilon} \left[\delta(x - \epsilon/2) - \delta(x + \epsilon/2) \right], h \right\rangle,$$

→ CARGA!

DE MODO QUE

$$\delta'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\delta(x + \frac{\epsilon}{2}) - \delta(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]$$

DIPOLO!

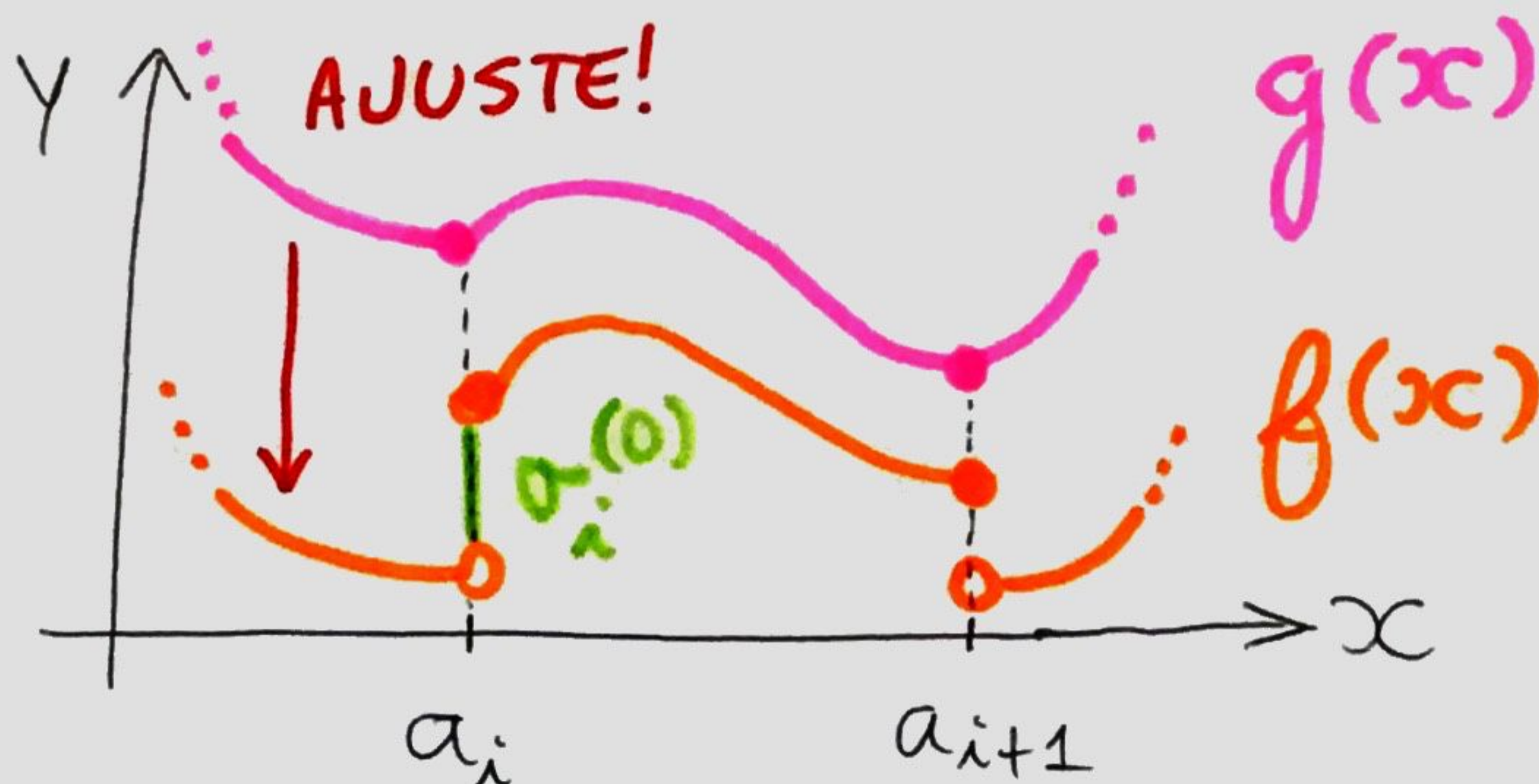


02

→ DERIVADA DE FUNÇÃO DESCONTÍNUA

VAMOS TRABALHAR EM $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. SEJA f UMA FUNÇÃO SECCIONALMENTE DIFERENCIÁVEL (CLASSE C^1 POR PARTES) COM UM NÚMERO FINITO DE DESCONTINUIDADES.

ARBITRÁRIA?



SE O CONJUNTO DE PONTOS DE DESCONTINUIDADE $\{a_1, \dots, a_n\}$ FOR TAL QUE $a_i < a_{i+1}$, PODERÍAMOS DEFINIR UMA FUNÇÃO CONTÍNUA g "COLANDO OS PEDAÇOS" E IMPONDO QUE $g(x) = f(x)$ PARA $x < a_1$. SE $f(a_i^+) \equiv \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x)$,

O SALTO DE f EM a_i É $\sigma_i^{(0)} \equiv f(a_i^+) - f(a_i^-)$

ENTÃO

HEAVISIDE

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^N \sigma_i^{(0)} \cdot H(x - a_i)$$

CONTÍNUA

DESCONTÍNUA

f PODE DENOTAR A FUNÇÃO ESTUDADA OU SUA DISTRIBUIÇÃO ASSOCIADA. f' PODE DENOTAR A DERIVADA USUAL DE f , COMO FUNÇÃO, MAS É INDEFINIDA EM Ω . MAS f' TAMBÉM PODE DENOTAR A DERIVADA, EM DISTRIBUIÇÃO, DA DISTRIBUIÇÃO f . SE A DERIVADA USUAL f' FOR LOCALMENTE INTEGRÁVEL, ELA DEFINE A DISTRIBUIÇÃO REGULAR $\{f'\}$ TAL QUE

$$\langle \{f'\}, h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \cdot h(x) dx$$

Ω "NÃO FAZ FALTA"!

NOTE QUE $f' = g'$ EM QUASE TODA PARTE (SÓ NÃO DÁ PRA GARANTIR EM TODA PARTE PORQUE PODERIA HAVER UMA COLAGEM PERFEITA DE PEDACOS...). MAS $\{f'\} = \{g'\}$!!!

NO SENTIDO DE DISTRIBUIÇÕES,

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^N \sigma_i^{(0)} \cdot H(x-a_i)$$

REGULAR

$\Downarrow$

SINGULAR

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^N \sigma_i^{(0)} \cdot \delta(x-a_i)$$

SE $\sigma_i^{(m)} \equiv f^{(m)}(a_i^+) - f^{(m)}(a_i^-)$ FOR O SALTO EM a_i NA m -ÉSIMA DERIVADA DE UMA f DE CLASSE C^∞ POR PARTES,

$$f'' = \{f''\} + \sum_i \sigma_i^{(1)} \delta(x-a_i) + \sum_i \sigma_i^{(0)} \delta'(x-a_i)$$

$$f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i^{(m-1-j)} \cdot \delta^{(j)}(x-a_i) \right]$$