VETORES, PRODUTO ESCALAR E PRODUTO VETORIAL – PARTE 1

Cálculo II – Aula 5

Profa. Dra. Patricia Targon Campana

Grupo de Biomateriais e Espectroscopia

pcampana@usp.br

Sala 339C – Titanic

3091-8883

9 3775-3979

tumblr. sciencenebula.tumblr.com

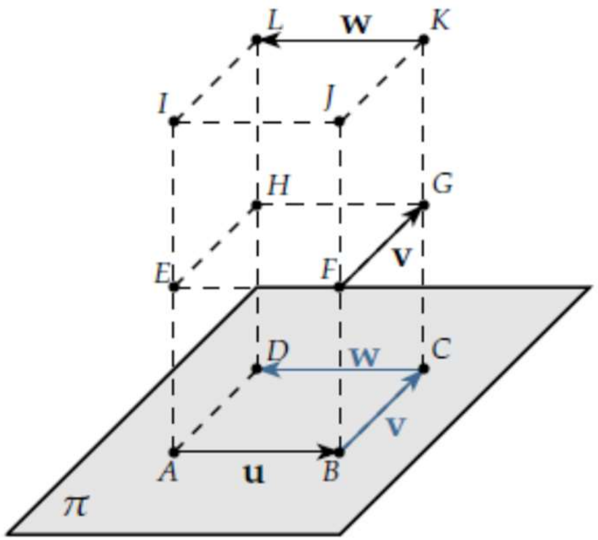
facebook /Campana.PT

twitter @profaPCampana

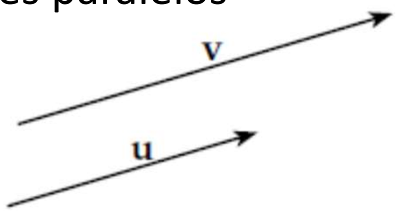
Um **vetor** (ou **segmento orientado**) é um par ordenado de pontos do espaço Euclideano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos como ponto inicial.

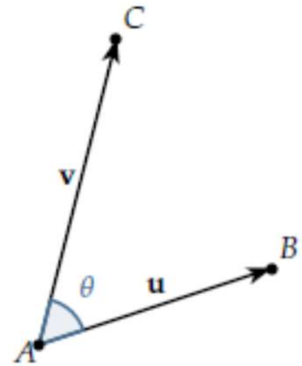
Nesse caso o outro extremo do segmento será denominado ponto final e o vetor aplicado com ponto inicial A e final B será denotado por AB.

Vetores coplanares

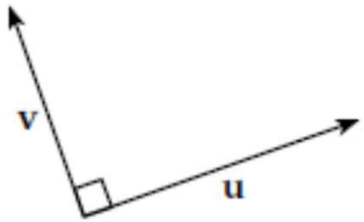


Vetores paralelos





Ângulo entre vetores

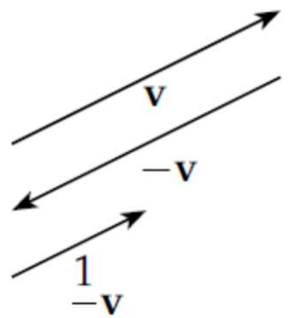


Vetores ortogonais

Operações com Vetores

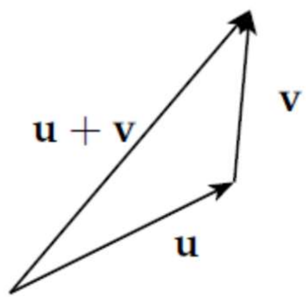
Multiplicação por Escalar: Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar λ podemos realizar a multiplicação de λ e $\mathbf{v}$ obtendo o vetor $\lambda\mathbf{v}$ definido do seguinte modo:

- Se o vetor $\mathbf{v}$ é nulo ou o escalar λ é zero então $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Se $\lambda > 0$, o vetor $\lambda\mathbf{v}$ é o vetor com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Se $\lambda < 0$ então o vetor $\lambda\mathbf{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}$ e comprimento $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$.



Multiplicação de um vetor por um escalar

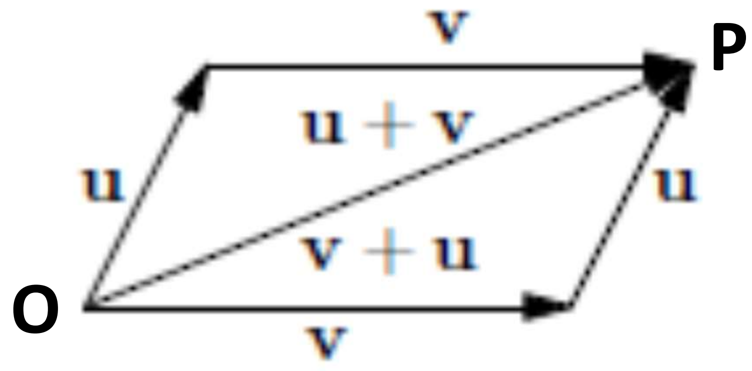
Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v}+\mathbf{u}$, de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overline{AB}$, representante arbitrário de $\mathbf{v}$, tome um segmento orientado $\overline{BC}$ que representa $\mathbf{u}$, i.e., tome um representante de $\mathbf{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\mathbf{v}$, desta forma o vetor $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de $\mathbf{v}$ até a extremidade final do representante de $\mathbf{u}$.



Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da **regra do paralelogramo**

Para somar dois vetores **v** e **u** através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P (formando um paralelogramo). O vetor diagonal **OP** é a soma dos vetores **v** e **u**.



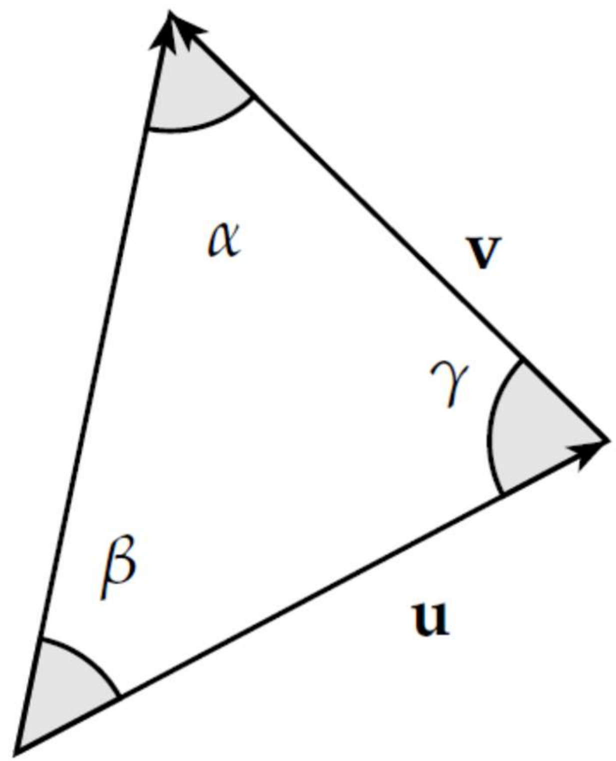
Para determinarmos o comprimento de **w** = **u** + **v** : considerando γ o ângulo indicado no triângulo da figura, pela Lei dos Cossenos temos:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\gamma}$$

Considerando, α, β e γ os ângulos indicados na figura, pela Lei dos Senos segue:

$$\frac{|\mathbf{w}|}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{|\mathbf{u}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\mathbf{v}|}{\operatorname{sen}\beta}$$

$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$



Produto escalar

Se $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ com $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é um sistema de coordenadas cartesiano, $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, então definimos o **produto escalar** (ou **produto interno**) de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *temos que:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

e assim o ângulo θ *entre esses vetores satisfaz:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\right).$$

produto escalar possui as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

5. $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Dado $\mathbf{u}$ *um vetor não nulo, e* $\mathbf{v}$ *um vetor qualquer, então a projeção ortogonal* $\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$ *de* $\mathbf{v}$ *em* $\mathbf{u}$ *existe e é única:*

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$$

Exemplo: Determine a área do triângulo △ABC cujos vértices num sistema de coordenadas cartesiano são: A = (1, 2), B = (3, 1) e C = (2, 5)

Solução: Temos que $\vec{AB} = (2,-1)$ e $\vec{AC} = (1, 3)$ e **n** (vetor ortogonal a AB): **n** = (1, 2)

A área do triângulo △ABC é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|h$$

onde $h = \|\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\,\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$, é a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado AB

Como $\|\mathbf{n}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, temos que $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{n}|$. Logo:

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)|1+6| = \frac{7}{2}.$$

Referências

- Neuhauser, Claudia, 1962. Calculus for biology and medicine
- Hughes-Hallett, Deborah. 2014 Applied calculus
- Hughes-Hallett, Deborah. 2017. Multivariable calculus
- Geometria Analítica e Vetorial - Daniel Miranda, Rafael Grisi, Sinuê Lodovici