

## Capítulo 2

# Sondando o espaço-tempo de Minkowski

Uma vez equipado nosso espaço-tempo com o que faz dele o espaço-tempo de Minkowski, vamos explorar as consequências dessas estruturas para nossa percepção de espaço e tempo. Primeiramente, nos restringiremos à “percepção” de observadores inerciais. Isso permitirá que trabalhemos apenas com linhas-de-mundo retilíneas e que a definição de quantidades não-locais (como distâncias macroscópicas) seja natural — graças à estrutura afim de  $\mathbb{M}$  que permite estabelecer a igualdade de 4-vetores em eventos diferentes. No caso de observadores acelerados, com suas linhas-de-mundo arbitrárias, medir/definir distâncias espaciais passa a ser uma tarefa mais sutil — embora intervalos de tempo continuem sendo univocamente definidos para cada observador. Neste capítulo, ainda evitaremos introduzir estruturas acessórias, como sistemas de coordenadas, para reforçar a idéia de que, embora úteis, não são essenciais.

### 2.1 Dilatação temporal, simultaneidade e contração de Lorentz: abordagem geométrica

Considere dois observadores inerciais,  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , com linhas-de-mundo que se cruzam no evento  $o \in \mathbb{M}$ . Cronômetros idênticos foram dados a ambos observadores e em  $o$  eles zeram seus cronômetros. Sejam  $p$  e  $\tilde{p}$  os eventos em que os cronômetros de  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , respectivamente, marcam uma unidade de tempo, digamos  $T_0$ . Logo, por construção,

$$\mathcal{I}(o, p) = -c^2 \Delta\tau(o, p)^2 = -c^2 T_0^2 = -c^2 \Delta\tilde{\tau}(o, \tilde{p})^2 = \mathcal{I}(o, \tilde{p}).$$

(Lembre-se que reservamos a notação  $\Delta\tau(p, q)$  para o intervalo de tempo entre os eventos  $p$  e  $q$  medido pelo observador inercial cuja linha-de-mundo passa por ambos os eventos.) Mas queremos saber qual o intervalo de tempo

$\Delta t(o, \tilde{p})$  que o observador  $\mathcal{O}$  atribui para essa “unidade de tempo” marcada pelo cronômetro de  $\tilde{\mathcal{O}}$ , assim como o intervalo de tempo  $\Delta \tilde{t}(o, p)$  que o observador  $\tilde{\mathcal{O}}$  atribui para a “unidade de tempo” marcada pelo cronômetro de  $\mathcal{O}$ . Sendo  $V$  o módulo da velocidade entre os observadores, temos que  $D(o, \tilde{p}) = V\Delta t(o, \tilde{p})$  e  $\tilde{D}(o, p) = V\Delta \tilde{t}(o, p)$ , onde  $D$  e  $\tilde{D}$  são as distâncias espaciais medidas por  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned} -c^2 T_0^2 &= -c^2 \Delta \tilde{\tau}(o, \tilde{p})^2 = \mathcal{I}(o, \tilde{p}) = -c^2 \Delta t(o, \tilde{p})^2 + D(o, \tilde{p})^2 \\ &= -(c^2 - V^2) \Delta t(o, \tilde{p})^2 \Leftrightarrow \Delta t(o, \tilde{p}) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

- **Exercício:** Mostre que a relação entre  $\Delta \tilde{t}(o, p)$  e  $T_0$  é a mesma que a dada pela Eq. (2.1), o que mostra a simetria entre os observadores.

A Eq. (2.1) mostra, concretamente, que, como decorrência da estrutura do espaço-tempo de Minkowski — em última instância, em decorrência da invariância da velocidade da luz —, medidas de intervalos de tempo são relativas. Em particular, a partir do resultado do Exercício abaixo, pode-se mostrar que, dentre todas as possíveis maneiras de um observador passar por dois eventos dados  $p, q \in \mathbb{M}$  (com separação tipo-tempo, evidentemente;  $\mathcal{I}(p, q) < 0$ ), a maneira que transcorre *mais* tempo entre  $p$  e  $q$  é através de um movimento inercial (ou seja, um segmento de reta ligando  $p$  e  $q$ ).

- **Exercício:** Sejam  $p, q \in \mathbb{M}$  eventos com separação tipo-tempo, de modo que  $q$  esteja no futuro de  $p$  (ou seja, um observador passando por  $p$  pode, *depois*, passar por  $q$ ). Considere, agora, um evento “intermediário”  $r \in \mathbb{M}$  de modo que  $r$  está no futuro de  $p$  e  $q$  está no futuro de  $r$ . Então:

- Mostre que na direção temporal vale uma desigualdade triangular *invertida*,  $\|\vec{p}\vec{q}\| \geq \|\vec{p}\vec{r}\| + \|\vec{r}\vec{q}\|$ , com a igualdade ocorrendo apenas se  $\vec{p}\vec{r} \propto \vec{p}\vec{q}$ ; (Sugestão: mostre, antes, que  $g_{ab}u^a v^b \leq -\|\vec{p}\vec{r}\| \|\vec{r}\vec{q}\|$ , onde  $u^a := \vec{p}\vec{r}$  e  $v^a := \vec{r}\vec{q}$ .)
- Interprete esse resultado geométrico em termos físicos, aplicando-o ao chamado “paradoxo dos gêmeos”<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Considere dois irmãos gêmeos, Alberto e Bia (dizigóticos ou um deles usa “nome fantasia”). Um deles, Bia, embarca numa viagem espacial a altíssimas velocidades, enquanto o outro, Alberto, fica na Terra. De acordo com o gêmeo na Terra, o tempo de sua irmã, em movimento, passa mais *devagar* do que o seu próprio, como dado pela Eq. (2.1), de modo que quando Bia retornar, ela estará mais jovem do que ele que ficou parado na Terra. No entanto, como movimento e repouso são conceitos relativos, para Bia é Alberto que se move (assim como toda a Terra) e, portanto, é o tempo de Alberto que passa mais lentamente em relação ao seu próprio. Logo, pensa ela, quando voltarem a se encontrar, Alberto estará mais jovem do que ela. Eis o “paradoxo dos gêmeos”.

Uma nota de atenção: o(a) leitor(a) deve resistir à tentação de aplicar a Eq. (2.1) indistintamente para calcular a relação entre intervalos de tempo medidos por diferentes observadores. Note que essa expressão foi deduzida especificamente para relacionar o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre dois eventos medido por um observador inercial qualquer, com o intervalo de tempo  $T_0 = \Delta\tau$  medido entre esses mesmos dois eventos pelo observador que os vê ocorrendo no mesmo ponto do espaço — em particular, então, a separação entre os eventos é tipo-tempo. Não é verdade que uma expressão análoga, como  $\Delta\tilde{t} = \Delta t / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , seja válida para relacionar os intervalos de tempo medidos por dois observadores quaisquer, entre dois eventos quaisquer. Se uma expressão assim fosse correta, o conceito de simultaneidade seria absoluto, pois teríamos  $\Delta t = 0 \Leftrightarrow \Delta\tilde{t} = 0$  — o que não é verdade, como veremos a seguir.

Vimos que a seção espacial instantânea de um observador inercial  $\mathcal{O}$ , com linha-de-mundo passando por  $p$  na direção dada por  $u^a$ , é dada pelo espaço (euclidiano)  $\Sigma(p, u^a)$  definido na seção anterior. Um outro observador inercial,  $\tilde{\mathcal{O}}$ , passando pelo mesmo evento  $p$ , mas na direção dada pelo 4-vetor  $\tilde{u}^a$ , terá sua seção espacial instantânea dada por  $\Sigma(p, \tilde{u}^a)$ . A questão é como essas seções (superfícies) de simultaneidade se relacionam. Podemos reduzir a análise à da relação entre a decomposição de  $\mathbb{V}$  em termos de  $u^a$  e  $\mathbb{V}^\perp(u^a)$  e em termos de  $\tilde{u}^a$  e  $\mathbb{V}^\perp(\tilde{u}^a)$  — pois os elementos de  $\mathbb{V}^\perp(u^a)$  e  $\mathbb{V}^\perp(\tilde{u}^a)$  geram, a partir de  $p$ , as superfícies  $\Sigma(p, u^a)$  e  $\Sigma(p, \tilde{u}^a)$ , respectivamente. Para isso, vamos associar uma base tetrad a cada observador  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ :  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$ , respectivamente. Por definição,  $\mathbf{e}_0^a := u^a / \sqrt{-g_{bc}u^b u^c}$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a := \tilde{u}^a / \sqrt{-g_{bc}\tilde{u}^b \tilde{u}^c}$  e, por simplicidade, escolheremos  $\mathbf{e}_1^a$  (respectivamente,  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$ ) na direção da projeção de  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a \propto \tilde{u}^a$  em  $\mathbb{V}^\perp(u^a) = \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$  (resp., na direção da projeção de  $\mathbf{e}_0^a \propto u^a$  em  $\mathbb{V}^\perp(\tilde{u}^a) = \mathbb{V}^\perp(\tilde{\mathbf{e}}_0^a)$ ):

$$\mathbf{e}_1^a \propto (\tilde{\mathbf{e}}_0^a)_\perp = \tilde{\mathbf{e}}_0^a + (g_{bc} \tilde{\mathbf{e}}_0^b \mathbf{e}_0^c) \mathbf{e}_0^a, \quad \tilde{\mathbf{e}}_1^a \propto (\mathbf{e}_0^a)_\perp = \mathbf{e}_0^a + (g_{bc} \mathbf{e}_0^b \tilde{\mathbf{e}}_0^c) \tilde{\mathbf{e}}_0^a.$$

Lembre-se que a quantidade  $g_{bc} \mathbf{e}_0^b \tilde{\mathbf{e}}_0^c$  pode ser expressa em termos da velocidade entre os observadores (vide item (b) do Exercício ④ do Capítulo anterior):  $g_{bc} \mathbf{e}_0^b \tilde{\mathbf{e}}_0^c = -1/\sqrt{1 - V^2/c^2} =: -\gamma$  (o fator  $\gamma$  é usualmente denominado *fator de Lorentz*).<sup>2</sup> Normalizando essas projeções e adotando uma convenção de sentido para os 4-vetores  $\mathbf{e}_1^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$ , temos:

$$\mathbf{e}_1^a = -\frac{c}{V} (\mathbf{e}_0^a - \gamma^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_0^a), \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^a = \frac{c}{V} (\tilde{\mathbf{e}}_0^a - \gamma^{-1} \mathbf{e}_0^a). \quad (2.3)$$

A interpretação geométrica/física dessas escolhas fica mais clara quando, a partir das equações acima, expressamos a base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$  em termos de  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  e vice-versa, como pedido no Exercício a seguir:

<sup>2</sup>Para se convencer de que o sinal negativo deve estar presente, considere o caso limite em que  $V \rightarrow 0$ . Nesse caso,  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a \rightarrow \mathbf{e}_0^a$ ,  $g_{bc} \mathbf{e}_0^b \tilde{\mathbf{e}}_0^c \rightarrow \eta_{00} = -1$  e  $\gamma \rightarrow 1$ .

- **Exercício:** Chegue, você mesmo, nas Eqs. (2.2,2.3), seguindo a construção acima, e, a partir dessas equações, relacione  $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ , obtendo:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_0^a = \gamma (\mathbf{e}_0^a + \frac{V}{c} \mathbf{e}_1^a) \\ \tilde{\mathbf{e}}_1^a = \gamma (\mathbf{e}_1^a + \frac{V}{c} \mathbf{e}_0^a) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{e}_0^a = \gamma (\tilde{\mathbf{e}}_0^a - \frac{V}{c} \tilde{\mathbf{e}}_1^a) \\ \mathbf{e}_1^a = \gamma (\tilde{\mathbf{e}}_1^a - \frac{V}{c} \tilde{\mathbf{e}}_0^a) \end{cases}. \quad (2.4)$$

O resultado do Exercício acima mostra que nossa escolha de orientação para  $\mathbf{e}_1^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  faz com que a velocidade de  $\tilde{\mathcal{O}}$  em relação a  $\mathcal{O}$  seja no sentido de  $\mathbf{e}_1^a$ , enquanto a velocidade de  $\mathcal{O}$  em relação a  $\tilde{\mathcal{O}}$  seja no sentido de  $-\tilde{\mathbf{e}}_1^a$ .

Para completar essas bases tetradas, note que os 4-vetores que faltam,  $\{\mathbf{e}_2^a, \mathbf{e}_3^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_2^a, \tilde{\mathbf{e}}_3^a\}$ , geram exatamente o *mesmo* espaço bidimensional dado por  $\Sigma(p, u^a) \cap \Sigma(p, \tilde{u}^a)$  — pois os eventos de  $\Sigma(p, u^a) \cap \Sigma(p, \tilde{u}^a)$  determinam direções no espaço-tempo, a partir de  $p$ , que são, simultaneamente, ortogonais a  $u^a$  e  $\tilde{u}^a$  e, portanto, ortogonais a  $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ ; cada observador “vê” esse espaço como o plano euclidiano ortogonal à velocidade relativa entre eles. Assim, por simplicidade, podemos escolher  $\mathbf{e}_2^a = \tilde{\mathbf{e}}_2^a$  e  $\mathbf{e}_3^a = \tilde{\mathbf{e}}_3^a$ , fechando a relação entre as bases:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_0^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_1^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_2^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_3^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V/c & 0 & 0 \\ \gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0^a \\ \mathbf{e}_1^a \\ \mathbf{e}_2^a \\ \mathbf{e}_3^a \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0^a \\ \mathbf{e}_1^a \\ \mathbf{e}_2^a \\ \mathbf{e}_3^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_0^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_1^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_2^a \\ \tilde{\mathbf{e}}_3^a \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

ou, em forma mais compacta,

$$\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a = M_\mu^\nu \mathbf{e}_\nu^a \iff \mathbf{e}_\mu^a = (M^{-1})_\mu^\nu \tilde{\mathbf{e}}_\nu^a, \quad (2.7)$$

com  $M$  sendo a matriz de mudança de base que aparece na Eq. (2.5). Note que  $M^{-1}$  é obtida de  $M$  simplesmente trocando  $V$  por  $-V$ . Isso é decorrência direta de nossa escolha de orientação de  $\mathbf{e}_1^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  (e de  $\mathbf{e}_2^a = \tilde{\mathbf{e}}_2^a$ ,  $\mathbf{e}_3^a = \tilde{\mathbf{e}}_3^a$ ; entenda fisicamente o porquê).

Estabelecida a relação entre as bases  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$  e notando, como dito acima, que  $\Sigma(p, u^a)$  e  $\Sigma(p, \tilde{u}^a)$  *coincidem* nas direções ortogonais ao movimento relativo entre os observadores  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , podemos nos restringir à relação entre  $u^a$ ,  $\Sigma(p, u^a)$  e  $\tilde{u}^a$ ,  $\Sigma(p, \tilde{u}^a)$  na direção do movimento relativo. A **Fig. 2.1**, construída com base nas Eqs. (2.4), representa, em diagramas espaço-tempo, esses entes geométricos (além do cone-de-luz de  $p$ ,  $\mathcal{C}_p$ ) no plano determinado pelas direções de  $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  (que é o mesmo determinado

pelas direções de  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ ). Embora os diagramas (a) e (b) pareçam diferentes — devido à impossibilidade de se representar fielmente *todos* os aspectos geométricos de um espaço-tempo em um espaço euclidiano (como a folha de papel) —, eles são completamente equivalentes. A diferente *aparência* entre os diagramas mostrados é análoga, no espaço-tempo, à de uma mera rotação num diagrama euclidiano: muda-se a representação das orientações mas se mantêm as distâncias (e orientações) *relativas*. Em particular, o(a) leitor(a) deve procurar se convencer de que, num diagrama espaço-tempo representado num espaço euclidiano, uma direção temporal é ortogonal a uma direção espacial se a *bissetriz* entre elas é uma direção tipo-luz (desde que seja usada a mesma escala em todas as direções, evidentemente). Assim, vemos que em ambos os diagramas, ambos os pares de 4-vetores,  $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ , são ortogonais. Note que as únicas direções que são mantidas invariantes nessa “mudança de perspectiva” são as direções tipo-luz.

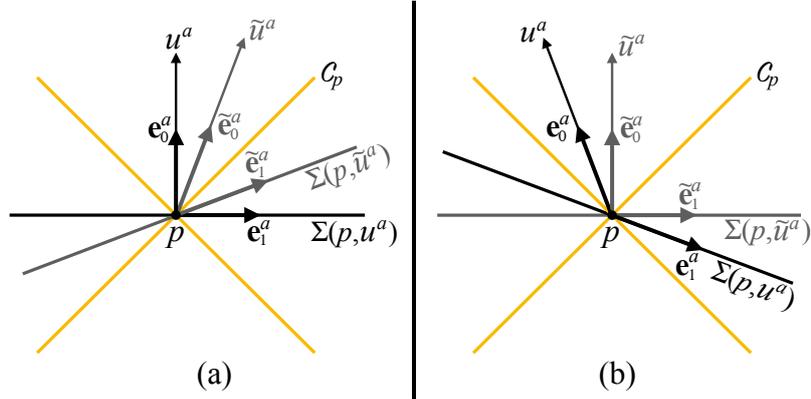


Figura 2.1: Diagramas espaço-tempo representando a relação entre  $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ , assim como as superfícies de simultaneidade  $\Sigma(p, u^a)$  e  $\Sigma(p, \tilde{u}^a)$  associadas às direções temporais dadas por  $u^a$  e  $\tilde{u}^a$ , respectivamente. Embora pareçam diferentes, ambos os diagramas são equivalentes, apenas mudando qual par de 4-vetores ( $\{\mathbf{e}_0^a, \mathbf{e}_1^a\}$  ou  $\{\tilde{\mathbf{e}}_0^a, \tilde{\mathbf{e}}_1^a\}$ ) escolhemos representar nas direções vertical e horizontal. Note que as direções tipo-luz são mantidas invariantes nessa “mudança de perspectiva” e são as bissetrizes tanto das direções dadas por  $\mathbf{e}_0^a$  e  $\mathbf{e}_1^a$ , quanto das dadas por  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  — o que estabelece a ortogonalidade entre elas, no espaço-tempo, em ambos os diagramas.

A **Fig. 2.2** mostra como essa inclinação relativa entre as superfícies de simultaneidade e as respectivas direções temporais permite que ambos observadores inerciais,  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , que passaram pelo evento  $p$  onde um *flash* de luz foi emitido, julguem-se no centro da “esfera de luz” que se expande a partir de sua posição — já que, para ambos, a velocidade da luz é constante e igual em todas as direções. Mesmo que, com o passar do tempo,  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$  se distanciem um do outro, a linha-de-mundo de cada um está sempre

no centro da intersecção do cone-de-luz  $C_p^+$  com sua própria superfície de simultaneidade. Essa discordância entre as superfícies de simultaneidade de

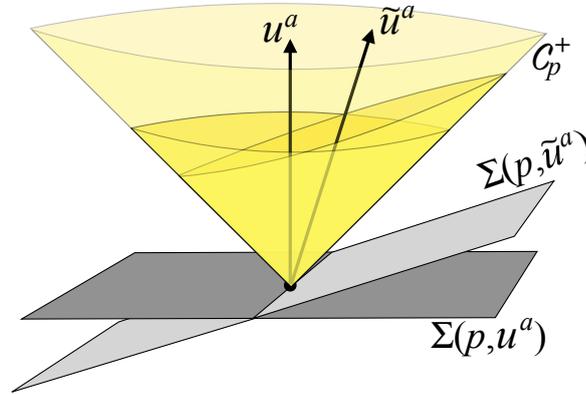


Figura 2.2: Diagrama espaço-tempo ilustrando como a relatividade da simultaneidade permite que diferentes observadores, com linhas-de-mundo passando por  $p$  em diferentes direções temporais, podem *ambos* julgarem-se no centro da “esfera de luz” que se expande a partir de um *flash* emitido no evento  $p$ .

diferentes observadores é precisamente o que torna tão útil a descrição da física relativística em termos de espaço-tempo — em contraste com o que ocorre com a física newtoniana, em que a descrição em termos de espaço-tempo é possível (vide Exercício 9 do Capítulo anterior), mas sem tantos ganhos.

Para finalizar esta Seção, vamos, agora, tratar da relação entre *distâncias espaciais* medidas por diferentes observadores (inerciais). Ingenuamente, o(a) leitor(a) poderia achar que, para isso, podemos proceder de modo análogo ao que fizemos para obter a Eq. (2.1), mas, agora, substituindo um intervalo invariante tipo-tempo por um tipo-espaço. Ou que, equivalentemente, auxiliados pelos diagramas da **Fig. 2.1** e pelas Eqs. (2.4), bastaria projetar o vetor unitário  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  na direção de  $\mathbf{e}_1^a$  — como é possível fazer para  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a$  na direção de  $\mathbf{e}_0^a$  para se reproduzir a Eq. (2.1) (vide Exercício 1). No entanto, ambos os procedimentos levariam a um resultado incorreto. Para entender o porquê disso, vamos analisar a questão com mais cuidado.

Considere os mesmos dois observadores inerciais  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$  com quem já estamos acostumados. Ambos se cruzam no evento  $p$  em direções temporais dadas por  $u^a$  e  $\tilde{u}^a$ . O observador  $\tilde{\mathcal{O}}$  carrega consigo uma régua, orientada na direção da velocidade relativa entre os observadores ( $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$ , por convenção), com comprimento dado por  $\tilde{L}_0$  (segundo o próprio  $\tilde{\mathcal{O}}$ ). A pergunta que se coloca é: *qual o comprimento dessa régua medido por  $\mathcal{O}$* ? Como dissemos acima, talvez fosse tentador definir um 4-vetor que para

$\tilde{\mathcal{O}}$  fosse puramente espacial e tivesse norma  $\tilde{L}_0$  ( $\tilde{s}^a = \tilde{L}_0 \tilde{\mathbf{e}}_1^a$ ) e, então, calcular a norma de sua projeção sobre a superfície de simultaneidade de  $\mathcal{O}$ :  $\|\tilde{s}_\perp^a\| = \sqrt{g_{ab}\tilde{s}_\perp^a\tilde{s}_\perp^b} = \sqrt{g_{ab}(g_{cd}\tilde{s}^c\mathbf{e}_1^d)\mathbf{e}_1^a(g_{ef}\tilde{s}^e\mathbf{e}_1^f)\mathbf{e}_1^b} = g_{ab}\tilde{s}^a\mathbf{e}_1^b = \gamma\tilde{L}_0$ , onde usamos que  $g_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_1^a\mathbf{e}_1^b = \gamma$ , visto de (2.4). Essa projeção, no entanto, *não* é vista, pelo observador  $\mathcal{O}$ , como sendo o comprimento da régua de  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Isso porque, considerando que as extremidades da régua descrevem linhas-de-mundo no espaço-tempo, o 4-vetor  $\tilde{s}^a$  descreve a separação entre as extremidades da régua, mas “ligando” eventos de suas linhas-de-mundo que são simultâneos de acordo com  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Então, a quantidade calculada acima,  $\gamma\tilde{L}_0$ , é apenas a separação espacial medida por  $\mathcal{O}$  entre esses *mesmos* dois eventos que, para ele, *não* são simultâneos; não se pode medir o tamanho de um objeto extenso usando, para isso, as posições de suas extremidades em instantes diferentes! O que o observador  $\mathcal{O}$  atribui como sendo o comprimento da régua é a separação espacial entre as posições de suas extremidades *no mesmo instante* (para ele,  $\mathcal{O}$ ).

Há mais de uma maneira de se calcular o tamanho medido por  $\mathcal{O}$  para a régua carregada por  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Apresentaremos, aqui, uma delas e deixaremos a cargo do(a) leitor(a) pensar em outra(s) maneira(s) (vide Exercícios ② e ③). Adaptando o procedimento (incorreto) usado acima, note que o equívoco foi usarmos o 4-vetor  $\tilde{s}^a$  para tentar obter o tamanho da régua de acordo com  $\mathcal{O}$ . Isso porque  $\tilde{s}^a$  representa a separação relativa entre as extremidades da régua em eventos de suas linhas-de-mundo que são simultâneos para  $\tilde{\mathcal{O}}$ , mas não para  $\mathcal{O}$ . Então, precisamos encontrar um 4-vetor separação entre essas mesmas linhas-de-mundo, mas ligando eventos simultâneos para  $\mathcal{O}$ . Para isso, primeiramente notemos que a separação relativa entre essas linhas-de-mundo usando eventos *arbitrários* (um em cada linha-de-mundo) tem a forma genérica  $s^a = \tilde{s}^a + \lambda\tilde{\mathbf{e}}_0^a = \tilde{L}_0\tilde{\mathbf{e}}_1^a + \lambda\tilde{\mathbf{e}}_0^a$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  — já estamos num estágio em que você deveria conseguir ver o porquê disso; vide **Fig. 2.3** se precisar de uma ajuda gráfica, tendo em mente que lá a régua carregada por  $\tilde{\mathcal{O}}$  é a azul e foi usado  $\tilde{L}_0 = 1$ . Como queremos um 4-vetor separação que seja puramente espacial para  $\mathcal{O}$ , temos que impor que  $g_{ab}s^a\mathbf{e}_0^b = 0$ , de onde se tira, com a ajuda das Eqs. (2.4), o valor de  $\lambda$ :

$$0 = \tilde{L}_0 g_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_1^a\mathbf{e}_0^b + \lambda g_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_0^a\mathbf{e}_0^b = -\gamma\frac{V}{c}\tilde{L}_0 - \gamma\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{V}{c}\tilde{L}_0.$$

Logo, o 4-vetor que fornece a separação entre as extremidades da régua de  $\tilde{\mathcal{O}}$  usando eventos de suas linhas-de-mundo que são simultâneos para  $\mathcal{O}$  é dado por  $s^a = \tilde{s}^a - V\tilde{L}_0\tilde{\mathbf{e}}_0^a/c$ , cuja norma, então, fornece o tamanho dessa régua de acordo com  $\mathcal{O}$ :

$$L = \sqrt{g_{ab}s^as^b} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\tilde{L}_0 = \frac{\tilde{L}_0}{\gamma}. \quad (2.8)$$

Note, então, que a régua em movimento é *contraída* por um fator  $\gamma$  na direção

do seu movimento<sup>3</sup>, ao contrário do que o procedimento incorreto anterior sugeria. Esse efeito, chamado de *contração de Lorentz*, é simétrico entre os observadores: o observador  $\tilde{\mathcal{O}}$  também julgaria que uma régua carregada por  $\mathcal{O}$  se contrai pelo mesmo fator. A **Fig. 2.3** ilustra, em diagramas espaço-tempo, como é possível que ambos os observadores julguem que a régua do outro é contraída em relação à sua própria.

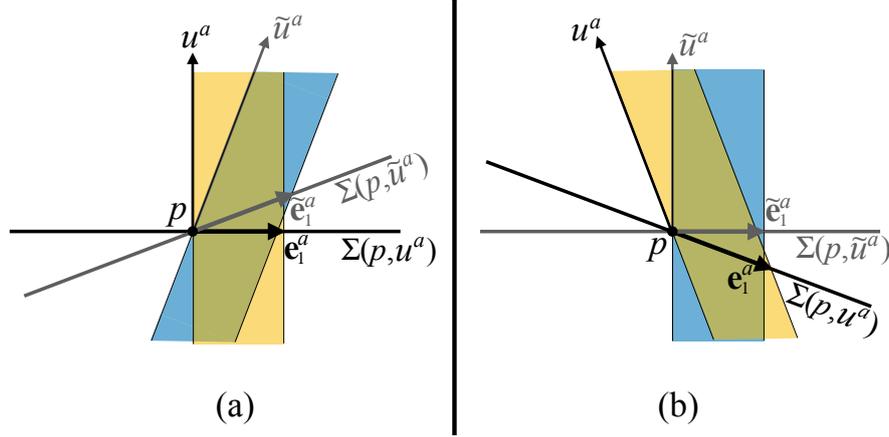


Figura 2.3: Diagramas espaço-tempo mostrando como é possível que ambos observadores,  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$  — cada um carregando sua própria régua unitária —, descrevam a régua do outro como sendo menor que a sua própria. As régua de  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$  (amarela e azul, respectivamente) descrevem *folhas-de-mundo* delimitadas pelas linhas-de-mundo de suas extremidades. Cada observador mede tamanhos ao longo da intersecção dessas folhas-de-mundo com sua própria superfície de simultaneidade. Mais uma vez, embora os diagramas (a) e (b) *pareçam* distintos, se referem apenas a “perspectivas” diferentes da mesma situação.

## 2.2 Observadores arbitrários e famílias de observadores

Na seção anterior, nos restringimos à percepção de tempo e espaço de observadores inerciais, cujas linhas-de-mundo no espaço-tempo são retilíneas. Para esses observadores, o intervalo de tempo  $\Delta\tau(p, q)$  decorrido entre dois eventos  $p$  e  $q$  pertencentes à sua linha-de-mundo é dado diretamente pelo intervalo invariante entre  $p$  e  $q$  via  $\Delta\tau(p, q) = \sqrt{-\mathcal{I}(p, q)}/c$ . Além disso, vimos que para esses observadores há uma noção *natural* de seção espacial (ou superfície de simultaneidade)  $\Sigma(p, u^a)$  em um evento  $p$  de sua linha-de-mundo

<sup>3</sup>Não é difícil de se ver que tamanhos nas direções perpendiculares ao movimento não são alterados. Veremos isso explicitamente mais adiante.