Linearização

- EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR
  - Exemplos
- OUTROS MÉTODOS
  - Realimentação (feedback linearization)
  - Perturbações

Expansão em série de Taylor

- Método: Expandir as funções numa série de Taylor e abandonar os termos de não lineares (O² → termos quadráticos e de ordem superior)
  - ***Funções de uma variável:***

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=xo}(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=xo}(x-x_0) + \text{------} + \frac{1}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}\Big|_{x=xo}(x-x_0)^{\mathrm{k}} + \text{-----------} + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x=xo}(x-x_0)^n}_{O^2}$$

Expansão em série de Taylor

- ***Funções multivariáveis:***

- Duas variáveis : $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$. Função linearizada ao redor de : $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$

$$f(x_1,x_2) = f(\overline{x_1},\overline{x_2}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overline{x_1}} (x_1 - \overline{x_1}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\overline{x_2}} (x_2 - \overline{x_2}) +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial^2_{x_1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2_{x_2}} + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\overline{x_1},\overline{x}_2} (x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})\right] + \ldots\ldots}_{O^2}$$

Ex: $z = x.y$

- Linearizar a função acima para os intervalos $5 \leq x \leq 7 \;\; ; \;\; 10 \leq y \ll 12$
  $\bar{x} = 6 \quad e \; \bar{y} = 11$

- Achar o erro de linearização em : $x = 5 \quad e \quad y = 10$

Linearização de Sistemas Multivariáveis

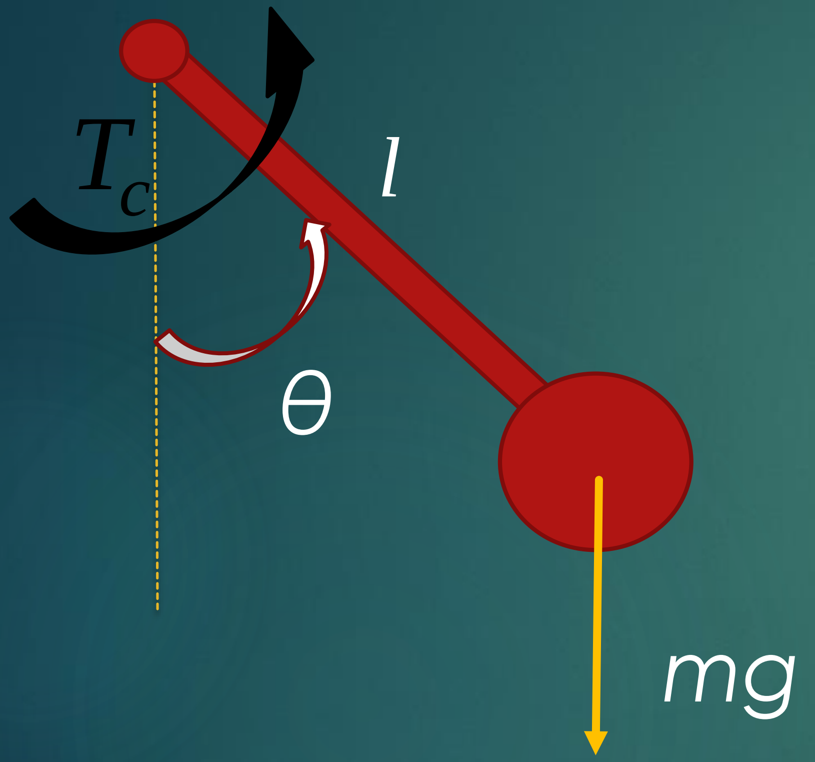
- Ex:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 x_2 + u_1 u_2 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2\,, t) \\ \dot{x_2} = x_2^2 + u_2^2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2\,, t) \\ y = x_1 + x_2 + u_1 u_2 = g(x_1, x_2, u_1, u_2\,, t) \end{cases}$$

$\overline{x_1} = 1 \quad ; \quad \overline{x_2} = 0$

$\overline{u_1} = 0 \quad ; \quad \overline{x_2} = 1$

Linearização por realimentação (feedback linearization)



Método do torque calculado:

$$J\ddot{\theta} = -mgl\,\text{sen}\,\theta + T_c$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\,\text{sen}\,\theta + T_c \qquad (1)$$

Seja $T_c = mgl\,\text{sen}\,\theta + u$ *(2)*

➔ *Pondo (2) em (1) vem:*

$$ml^2\ddot{\theta} = u \quad ➔ \quad \textit{LINEAR!}$$

Obs.: O torque aplicado no pêndulo deve ser dado por (2).

Método das perturbações (pequenos sinais)

Dada $f(x,u,t) = 0 \quad onde \quad f,\ x,\ u\ podem\ ser\ vetores.$

Substituímos as variáveis pela variáveis perturbadas:

$x = \bar{x} + \Delta x \qquad u = \bar{u} + \Delta u$

e em seguida abandonamos os termos não lineares.

Para equações diferenciais, em geral, linearizamos a equação ao redor do ponto de equilíbrio:

$\dot{x} = f(x,u,t)$ ➔ $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u},t) = 0$ ➔ $\bar{x}$; $\bar{u}$

Exemplo: $m\dot{v} = F(t) - mru + mx\dot{r}$ (1)

onde m é um parâmetro constante com a massa, por exemplo:

Seja: $v = \bar{v} + \Delta v \quad r = \bar{r} + \Delta r \quad u = \bar{u} + \Delta u \quad x = \bar{x} + \Delta x \quad F = \bar{F} + \Delta F$ (2)

➔ $\dot{v} = \dot{\bar{v}} + \Delta\dot{v} \quad \dot{r} = \dot{\bar{r}} + \Delta\dot{r}$

Admitir que, neste caso: $\dot{\bar{v}} = \bar{r} = \dot{\bar{r}} = 0$ (3)

$$\mathrm{m}\dot{v} = \mathrm{F} - m\bar{u}r + m\bar{x}\dot{r}$$

Pondo (2) em (1) e usando (3), vem:

$m(\dot{\bar{v}} + \Delta\dot{v}) = (\bar{F} + \Delta F) - m(\bar{r} + \Delta r)(\bar{u} + \Delta u) + m(\bar{x} + \Delta x)(\dot{\bar{r}} + \Delta\dot{r})$ ➔

$m(\Delta\dot{v}) = (\bar{F} + \Delta F) - m(\bar{u}\Delta r) - m(\Delta r \Delta u) + m(\bar{x}\Delta\dot{r}) + m\,\Delta x\,\Delta\dot{r}$ ➔voltando às variáveis originais: $\Delta\dot{v} = \dot{v}$

$F = \bar{F} + \Delta F \qquad \Delta r = r \qquad \Delta\dot{r} = \dot{r}$

Termos de segunda ordem: desprezíveis