Ondas IV

Física II - Módulo II - Fenômenos Ondulatórios

Ondas Planas

De fato as ondas, em geral, se propagam em 3D ... Precisamos de uma versão 3D da equação de onda

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] A(x,y,z,t) = 0}$$

Essa é uma generalização evidente da equação de ondas em 1D

Essa equação, como vocês verão, é invariante sob transformações de Lorentz (rotações & boots)

Existem várias soluções para essa equação, um dos tipos de solução são chamadas ondas planas

vetor de onda

frequência

$$A(x,y,z,t) = A_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

amplitude

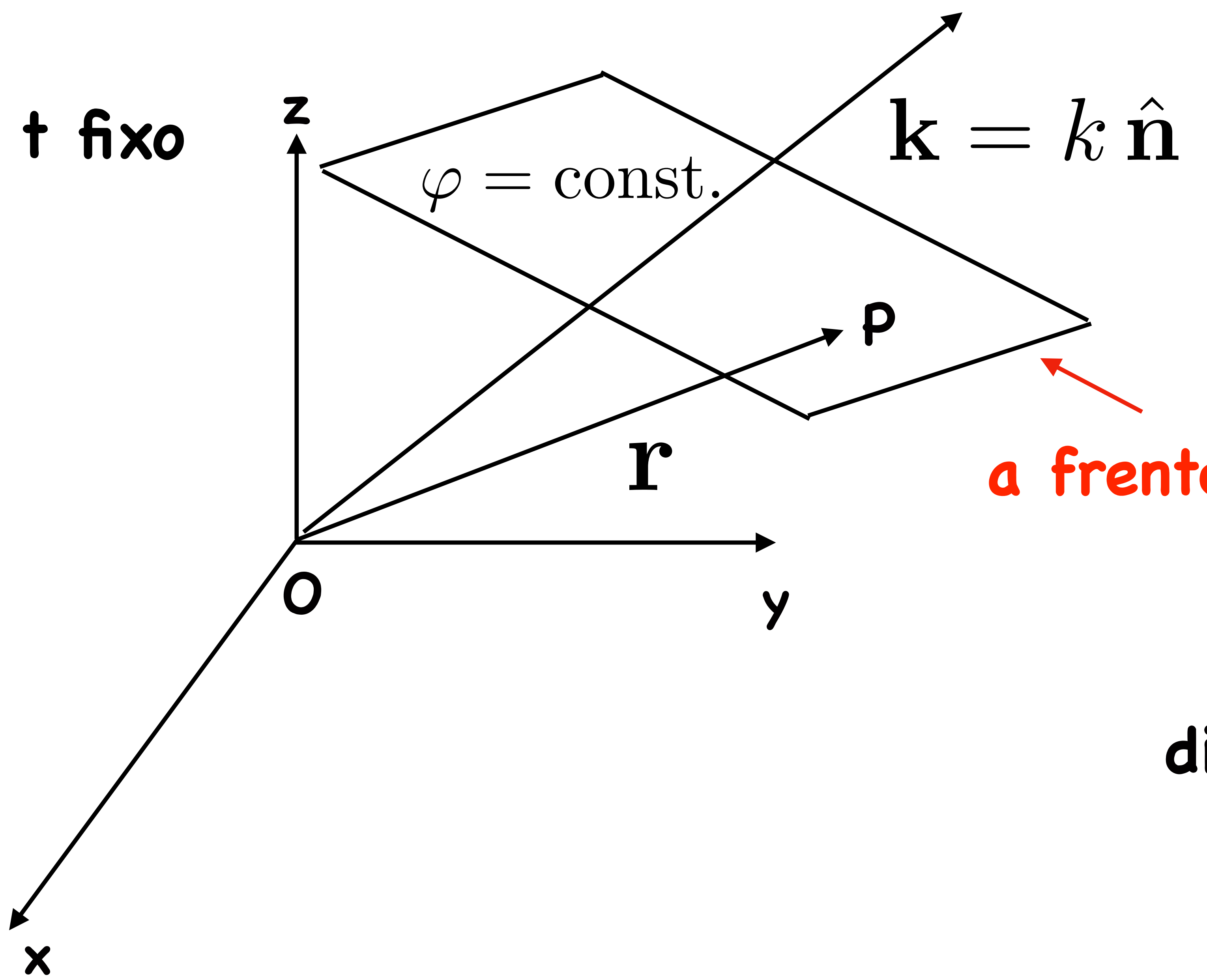
constante de fase

$$\omega = v\,|\mathbf{k}|$$

$\mathbf{k}$ pode apontar em qualquer direção

Ondas Planas

t fixo



a frente de onda são planos

chamamos de frente de onda o lugar geométrico dos pontos de fase constante num dado instante t

$$\varphi = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad \text{fase}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \text{const.}$$

direção em que $\mathbf{k}$ aponta é a direção de propagação da onda

EXEMPLOS : $\mathbf{k} = (0, k, 0)$ onda propagando-se na direção y com freqüência angular ω= k v

$$A(x,y,z,t) = A_0 \cos(k(y - vt) + \frac{\pi}{2})$$

$\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ onda propagando-se na direção $\mathbf{k}$ com freqüência angular $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}\, v$

$$A(x,y,z,t) = B_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t - \pi\right) = B_0 \cos\left(k_x x + k_z z - \omega t - \pi\right)$$

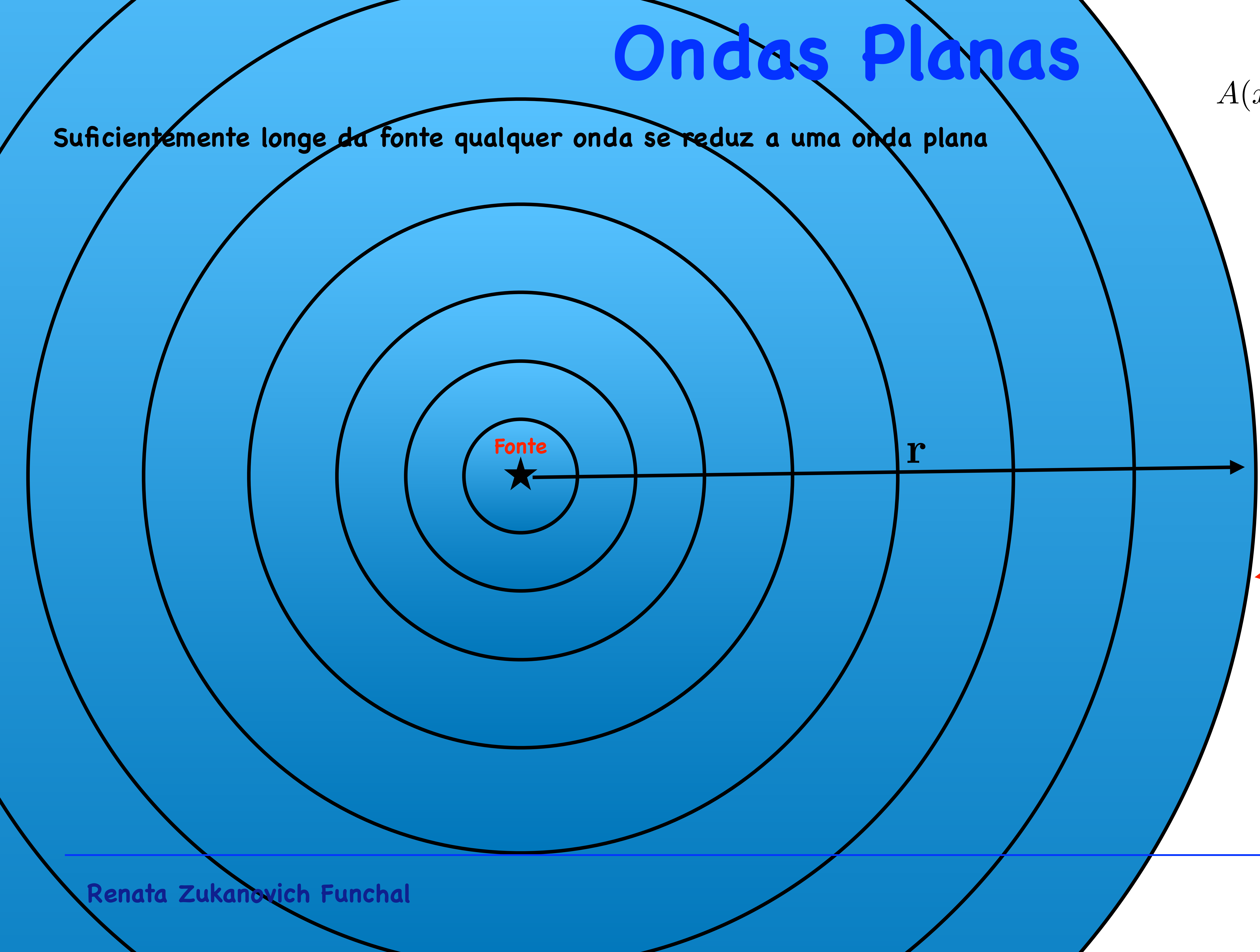
Ondas Planas

Suficientemente longe da fonte qualquer onda se reduz a uma onda plana

$$A(x,y,z,t) = \frac{A_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

as frente de onda são esferas



aqui a frente de é praticamente plana

Interferência

Uma das propriedades mais importantes das ondas é o fenômeno de interferência (construtiva & destrutiva)

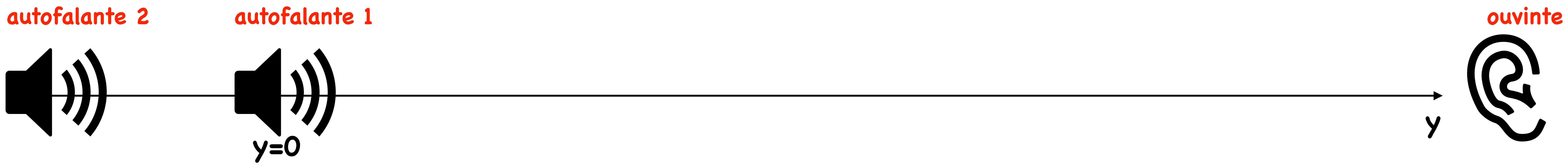
Para fixar as idéias imagine um autofalante emitindo som com frequência ω

Se o autofalante está em y=0 e estivermos à uma distância suficientemente longe da onde, o som vai aparecer como uma onda plana

$$A_1(y,t) = A_0 \cos(\omega t - ky + \phi_1)$$

Agora imagine que temos um outro alto-falante diretamente atrás do primeiro produzindo o mesmo som com o mesmo volume Nesse caso este autofalante também produzirá uma onda plana a uma distância suficientemente longe

$$A_2(y,t) = A_0 \cos(\omega t - ky + \phi_2)$$



Interferência

O som que será percebido na posição do ouvinte será resultado da soma

$$A_T(y,t) = A_1(y,t) + A_2(y,t) \;= A_0 \cos(\omega t - ky + \phi_1) + A_0 \cos(\omega t - ky + \phi_2)$$

$$= A_0\,\mathrm{Re}[e^{i(\omega t - ky + \phi_1)} + e^{i(\omega t - ky + \phi_2)}]$$

$$= A_0\,\mathrm{Re}[e^{i(\omega t - ky)}(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2})]$$

$$= A_0\,\mathrm{Re}[e^{i(\omega t - ky)}(e^{i(\frac{\phi_1+\phi_1}{2})} + e^{i(\frac{\phi_2+\phi_2}{2})})]$$

$$= A_0\,\mathrm{Re}[e^{i(\omega t - ky + \frac{\phi_1+\phi_2}{2})}(e^{i(\frac{-\phi_2+\phi_1}{2})} + e^{i(\frac{-\phi_1+\phi_2}{2})})]$$

diferença de fase

$$= 2A_0\; \cos(\omega t - ky + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos(\frac{\boxed{\phi_1 - \phi_2}}{2})$$

Interferência

A potência média do primeiro autofalante é

$$\overline{P_1} = Z\overline{\left(\frac{\partial A_1(y,t)}{\partial t}\right)^2} = Z\overline{(-A_0\omega\sin(\omega t - ky + \phi_1))^2} = ZA_0^2\omega^2\,\overline{\sin^2(\omega t - ky + \phi_1)} \quad = \frac{1}{2}ZA_0^2\omega^2$$

A potência média (da soma) para o ouvinte é

$$\overline{P_T} = Z\overline{\left(\frac{\partial A_T(y,t)}{\partial t}\right)^2} = Z\overline{\left(-2A_0\omega\sin(\omega t - ky + \frac{\phi_1+\phi_2}{2})\cos(\frac{\Delta\phi}{2})\right)^2} = 4ZA_0^2\omega^2\cos^2(\frac{\Delta\phi}{2})\frac{1}{2}$$

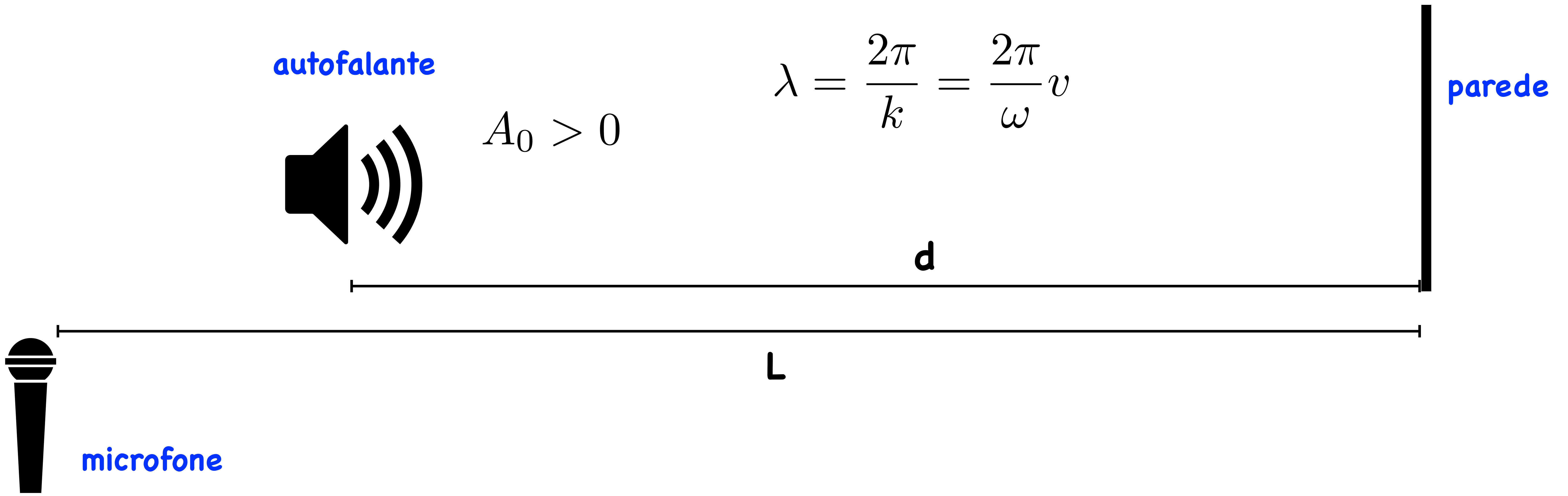
$$= 4\,\overline{P_1}\cos^2(\frac{\Delta\phi}{2})$$

- se autofalantes não correlacionados ($\neq$ muda ao longo do tempo) $\overline{P_T} = 2\,\overline{P_1}$
- se $\Delta\phi = \pi$ $\quad \overline{P_T} = 0$ $\quad$ interferência destrutiva
- se $\Delta\phi = 0$ $\quad \overline{P_T} = 4\,\overline{P_1}$ $\quad$ interferência construtiva

Como Produzir Autofalantes Coerentes ?

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v$$

$$A_0 > 0$$



$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad Z_2 \to \infty \qquad R \to -1$$

a onda refletida na parede tem $A_0 < 0$

onda completamente refletida

Qual a intensidade do som registrada pelo microfone ?

A maneira mais fácil de responder a essa pergunta é usando o Método das Imagens ...

Método das Imagens

L, d grandes o suficiente para que o autofalante e a imagem produzam ondas planas na posição do microfone

fonte original a uma distância L-d do microfone

autofalante $$A_1 = A_0 \cos(k(L-d) + \omega t)$$

imagem $$A_2 = A_0 \cos(k(L+d) + \omega t)$$

por simplicidade

$$\phi = 0$$

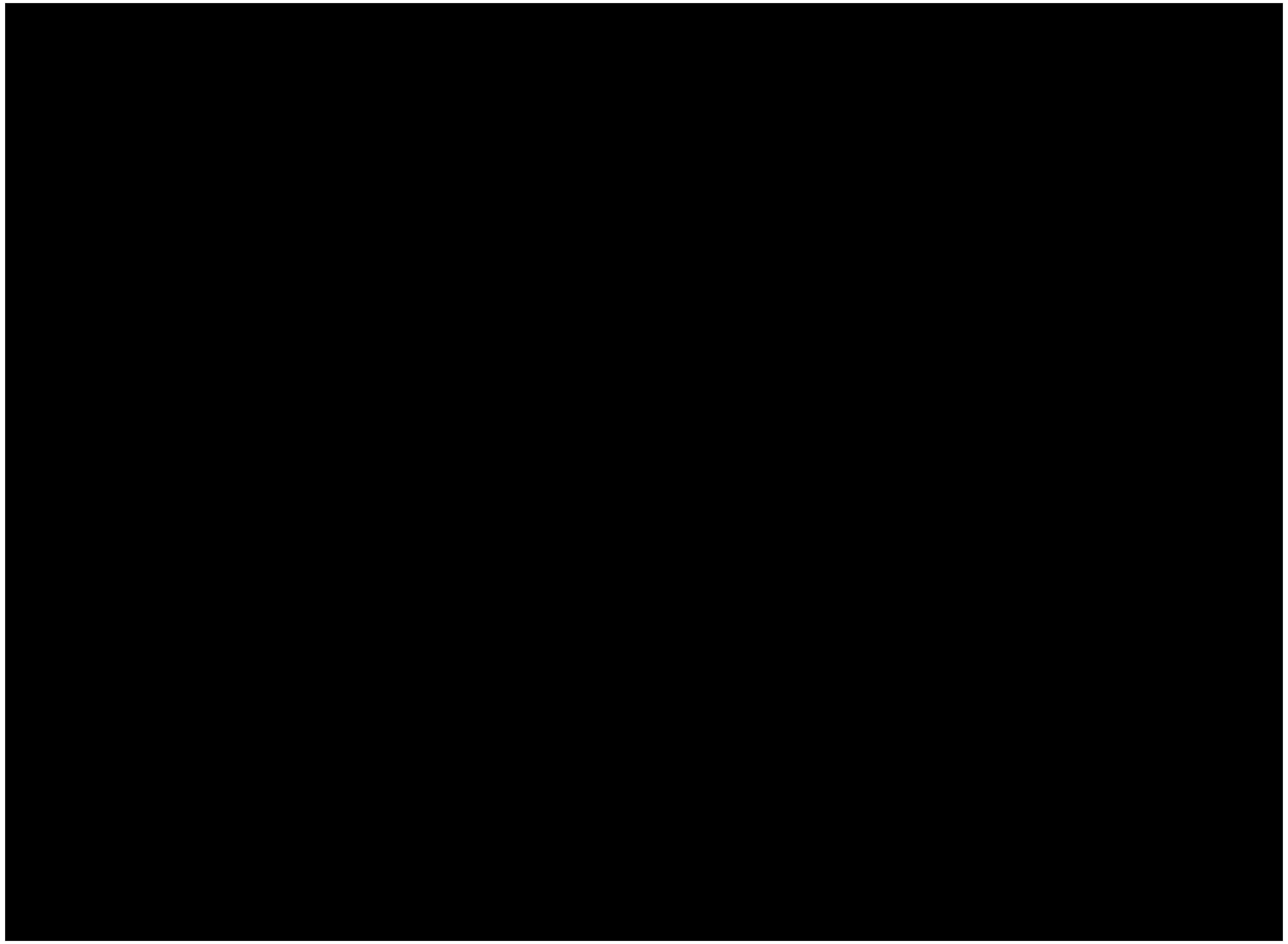
$$\Delta\varphi = 2kd = \frac{4\pi d}{\lambda}$$

defasafem no microfone

interferência construtiva (auto-amplificação)
4x mais potência

$$d \ll \lambda \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi \to 0$$

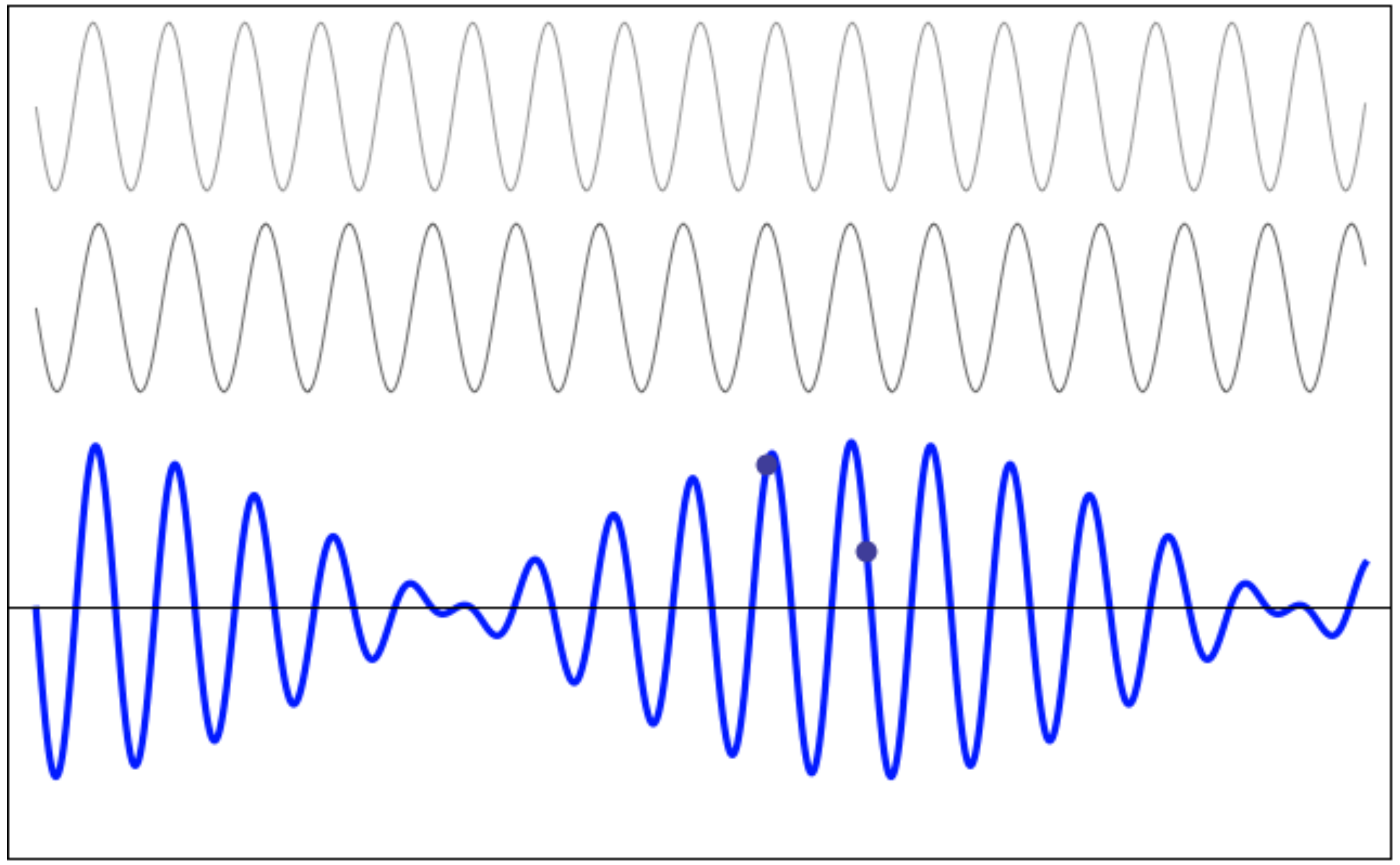
Batimento Sonoro



cortesia Prof. Paulo Nussenzveig

fenômeno de interferência

onda de frequência ϖ tem amplitude modulada por onda de frequência $\Delta\omega/2 \ll \varpi$



Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Grad. Prog. Acoustics, Penn State

Batimento

Considere 2 ondas se propagando no mesmo sentido com a mesma amplitude mas frequências ligeiramente diferentes

$$A_1(x,t) = A_0\cos(k_1 x - \omega_1 t) \qquad A_2(x,t) = A_0\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \qquad \Delta k = k_1 - k_2 \ll \overline{k} = \frac{k_1+k_2}{2} \qquad \omega_1 > \omega_2, \quad k_1 > k_2$$

$$\boxed{\omega_1 = \overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}} \qquad \boxed{k_1 = \overline{k} + \frac{\Delta k}{2}}$$

$$\boxed{\omega_2 = \overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}} \qquad \boxed{k_2 = \overline{k} - \frac{\Delta k}{2}}$$

$$A_1 + A_2 = A_0\left\{\cos\left((\overline{k}+\frac{\Delta k}{2})x - (\overline{\omega}+\frac{\Delta\omega}{2})t\right) + \cos\left((\overline{k}-\frac{\Delta k}{2})x - (\overline{\omega}-\frac{\Delta\omega}{2})t\right)\right\}$$

$$= 2A_0\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\overline{k}x - \overline{\omega}t)$$

onda de frequência $\overline{\omega}$ tem amplitude modulada por onda de frequência $\Delta\omega/2 \ll \overline{\omega}$

a frequency de batimento é $\Delta\omega$

Grupo de Ondas

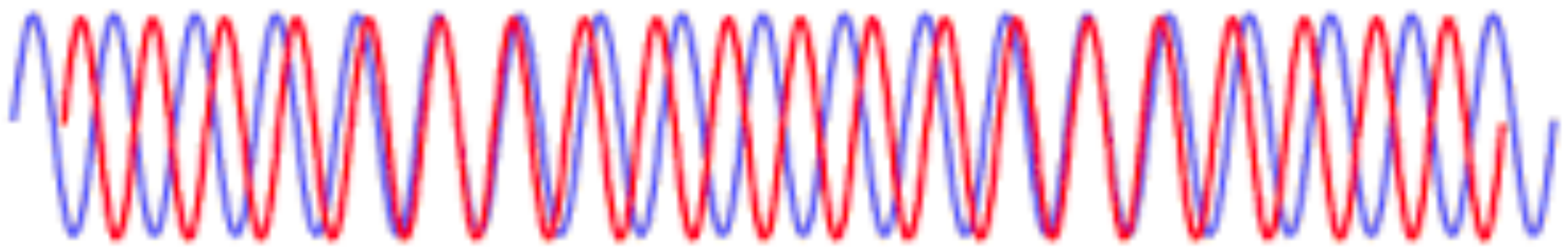
Esse é o exemplo mais simples de um grupo de ondas

A velocidade com que se desloca um ponto de fase constante é chamada de velocidade de fase

$$\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \bar{k}\frac{dx}{dt} - \bar{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}}$$

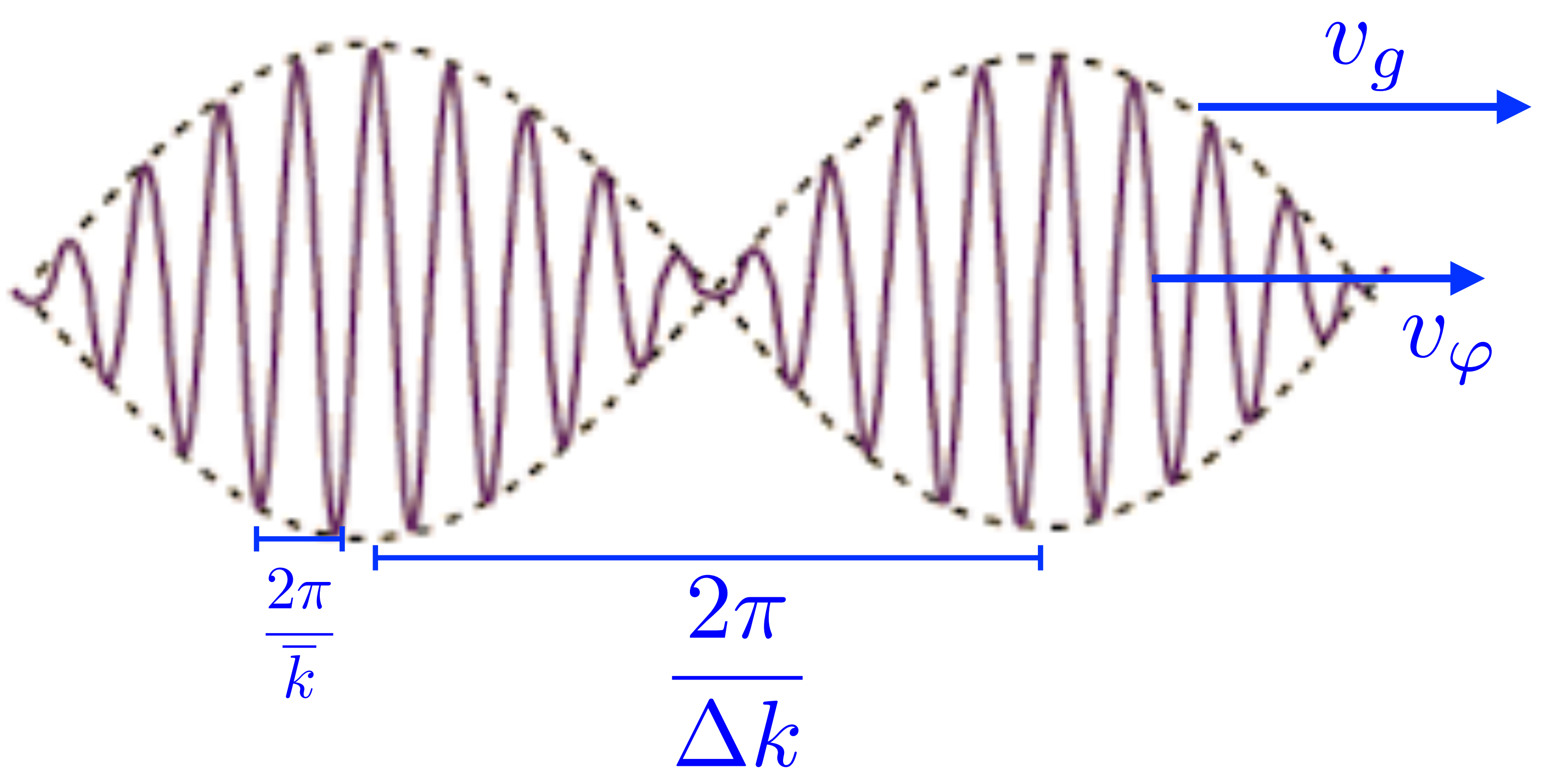
A velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade associada a um ponto da envoltória

$$a(x,t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$



é chamada de velocidade de grupo

$$\frac{\Delta k}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{\Delta\omega}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}}$$



Velocidade de Fase & Velocidade de Grupo

$$\omega(k) = k\, v_\varphi(k)$$

EXEMPLO I: Corda Vibrante

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \text{const.} \qquad v_g = v_\varphi = v$$

meio não dispersivo

velocidade de grupo = velocidade de fase

EXEMPLO II: Ondas em águas profundas

meio dispersivo

$$\omega(k) = \sqrt{g\,k} = k\sqrt{\frac{g}{k}} = k\; v_\varphi(k) \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi + k\frac{dv_\varphi}{dk} = \frac{1}{2}v_\varphi(k) \qquad v_\varphi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

velocidade de grupo < velocidade de fase

$$\lambda \gg d$$

Velocidade de Fase & Velocidade de Grupo

$$\omega(k) = k\, v_\varphi(k)$$

EXEMPLO III: Ondas em águas rasas

$$\omega(k) = k\sqrt{gd} = k\, v_\varphi(k) \qquad v_g = v_\varphi = \sqrt{g\, d}$$

d é a profundidade

meio não dispersivo

velocidade de grupo = velocidade de fase

EXEMPLO IV: Ondas de superfície (como em um lago)

meio dispersivo

$$\omega(k) = k\sqrt{k\,\rho\,\sigma} = k\, v_\varphi(k)$$

ρ é a densidade

σ é a tensão superficial

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\sqrt{k\,\rho\,\sigma} = \frac{3}{2} v_\varphi(k)$$

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\pi\,\rho\,\sigma}{\lambda}}$$

velocidade de grupo > velocidade de fase

Velocidade de Fase & Velocidade de Grupo

$$\boxed{\omega(k) = k\, v_\varphi(k)}$$

EXEMPLO IV: propagação da luz no vidro

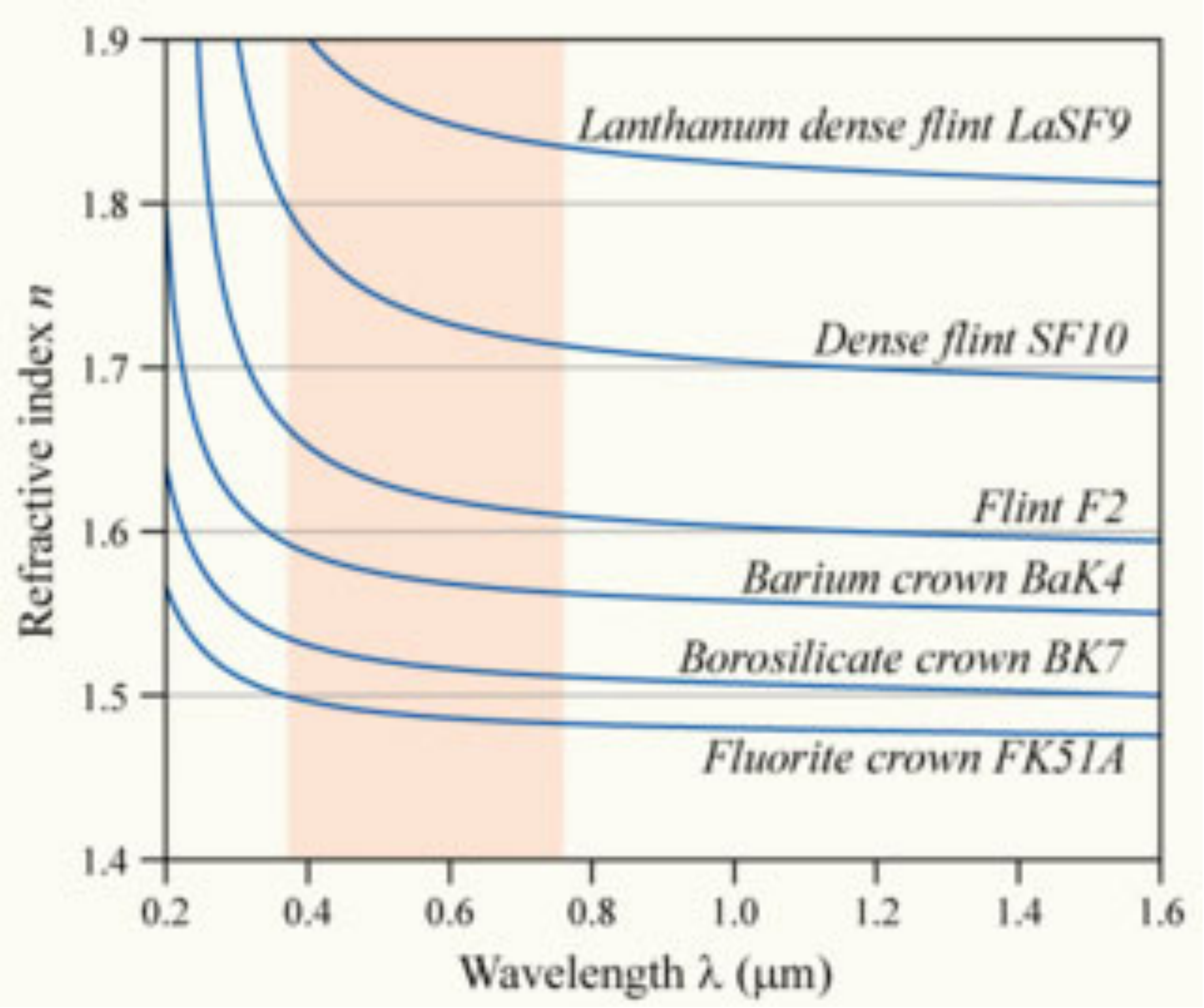
n = índice de refração
c = velocidade da luz no vácuo

$$\omega(k) = \frac{c}{n} k$$

para a maioria dos vidros

$$n = \sqrt{1 + \frac{a}{k_0^2 - k^2}}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{n} \approx v_g$$



Velocidade de Fase & Velocidade de Grupo

meio não dispersivo

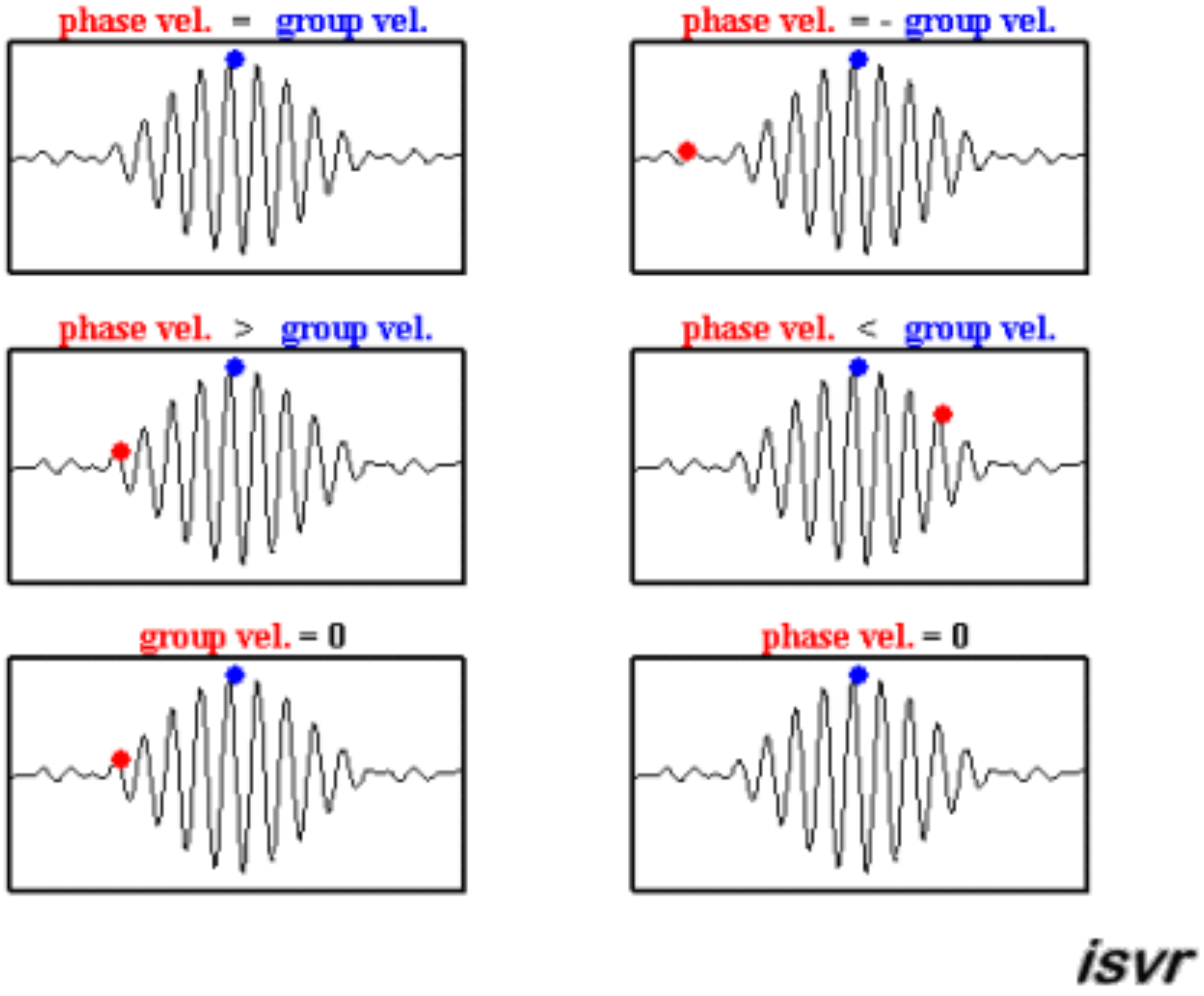
envelope se descola para a esquerda
componentes para a direita

envelope se descola mais
devagar que componentes

envelope se descola mais
depressa que componentes

envelope parado
componentes em movimento

envelope em movimento
componentes estacionárias

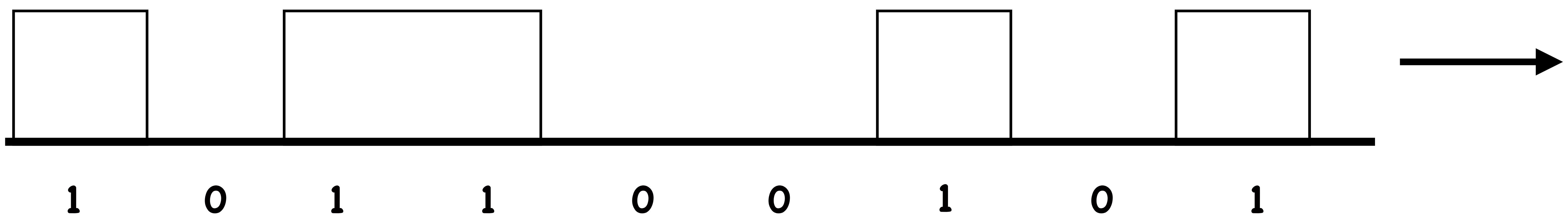


Ondas & Transmissão de Informação

Uma das principais utilidade das ondas é a transmissão de informação

Ondas harmônicas não podem carregar informação : não tem começo nem fim

Para enviar um sinal precisamos de algo limitado no espaço e no tempo, como um pulso quadrado



como já vimos esses pulsos são superposições infinitas de ondas harmônicas (ainda não vimos as situações não periódicas ou limitadas) de frequências diferentes

Em meios não dispersivos todas as frequências transitam com a mesma velocidade (v só depende das propriedades do meio)

→ a forma do pulso não se altera

Mas infelizmente a vida não é sempre assim ... em geral, meios materiais são dispersivos !

Corda Real

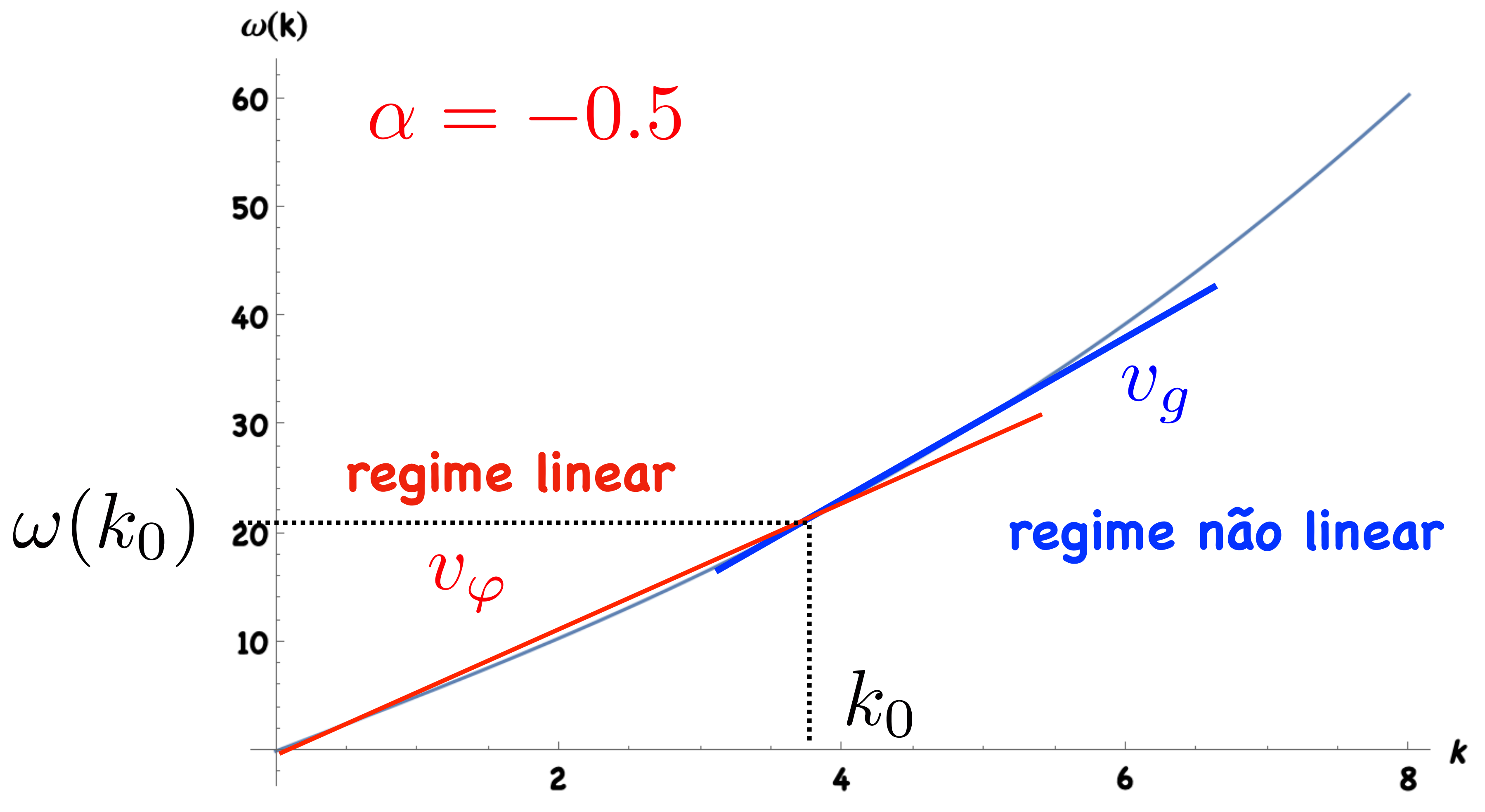
Mesmo uma corda real não é exatamente um meio não-dispersivo

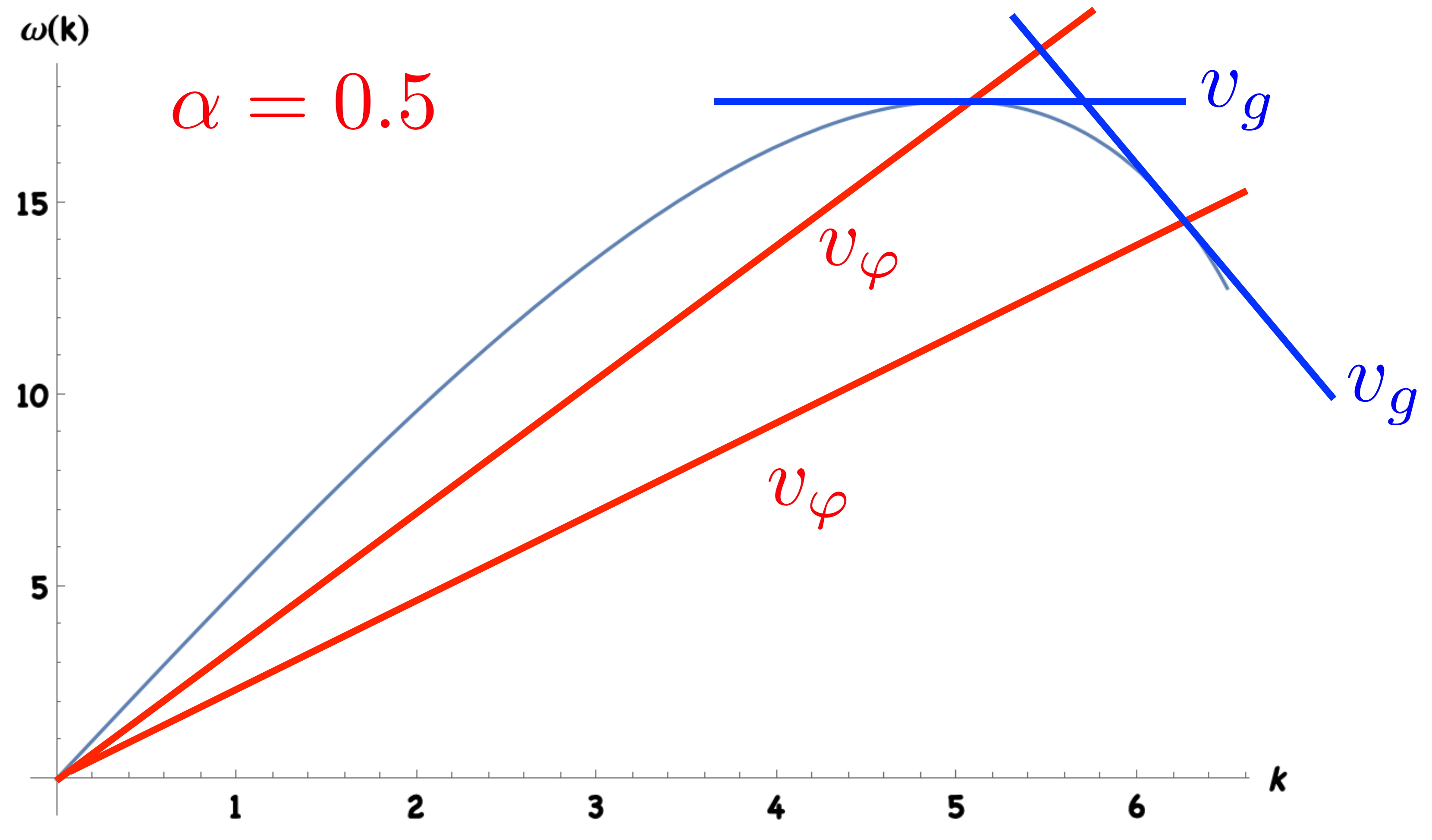
O que estudamos é uma idealização ou uma aproximação que funciona até certo ponto ...

Cordas reais tem rigidez

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,t) + \alpha \frac{\partial^4 A}{\partial x^4}(x,t)$$

usando $A(x,t) = A_0\, e^{i(kx+\omega t)}$ obtemos a nova relação de dispersão $-\omega^2 = -v^2 k^2 + \alpha k^4$ $\quad \omega = k\sqrt{v^2 - \alpha k^2}$





Corda Real

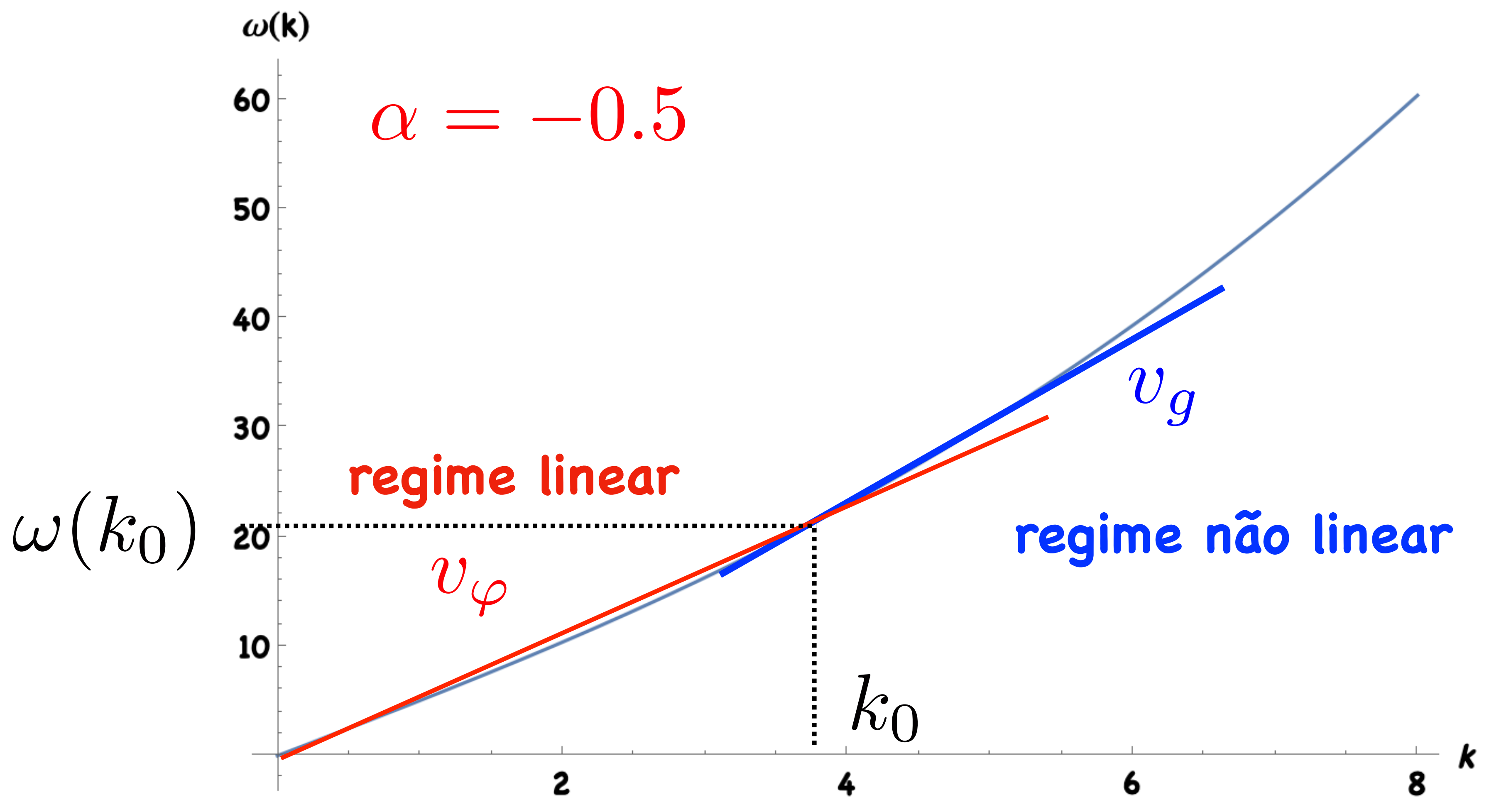
Observamos claramente que fora do regime linear a velocidade de grupo $\neq$ velocidade de fase

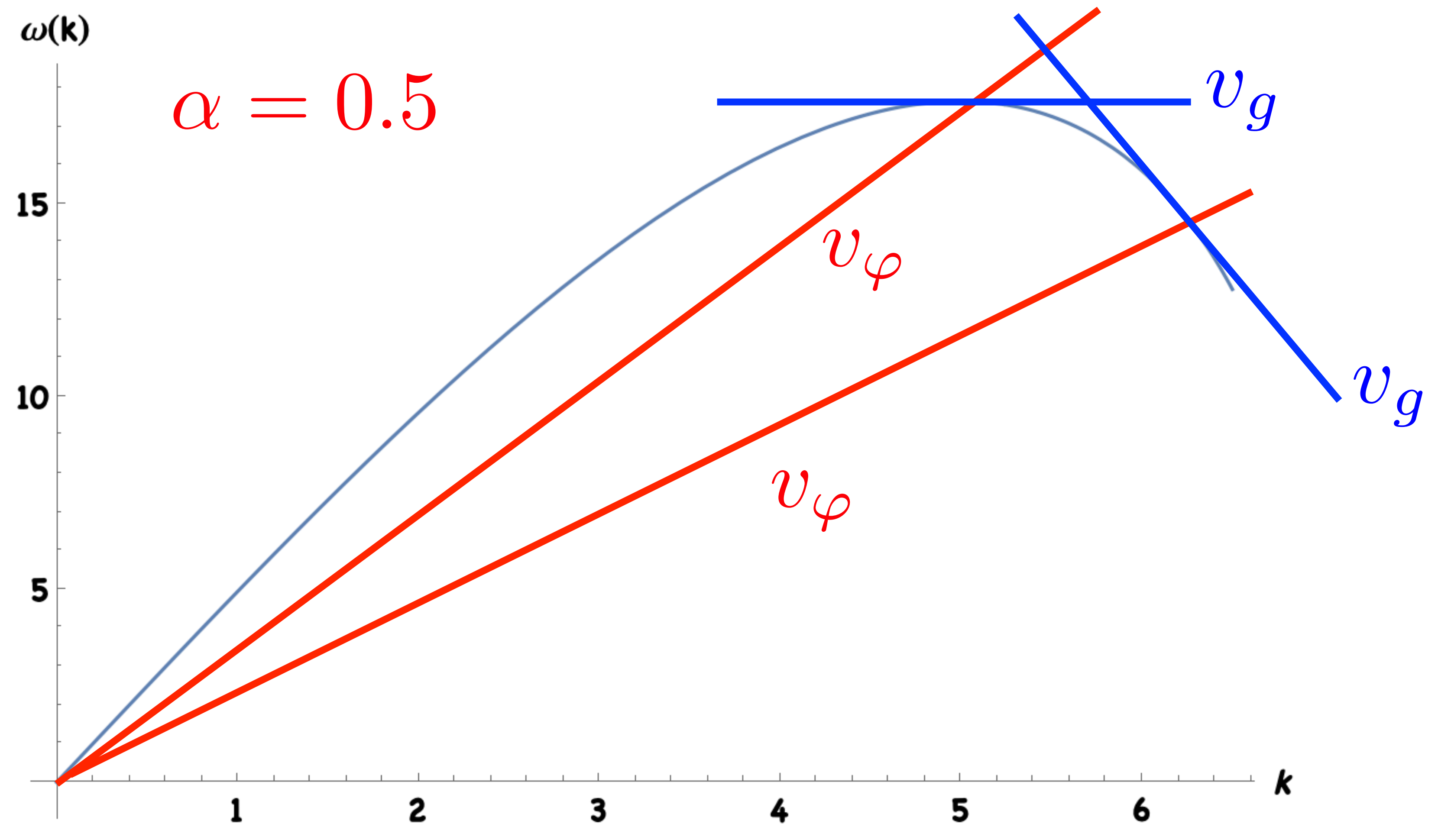
Isso tem implicações importantes para a transmissão de informação !

Os pulsos quadrados que vimos e que são superposições de várias frequências ω agora não propagam-se sem deformação!

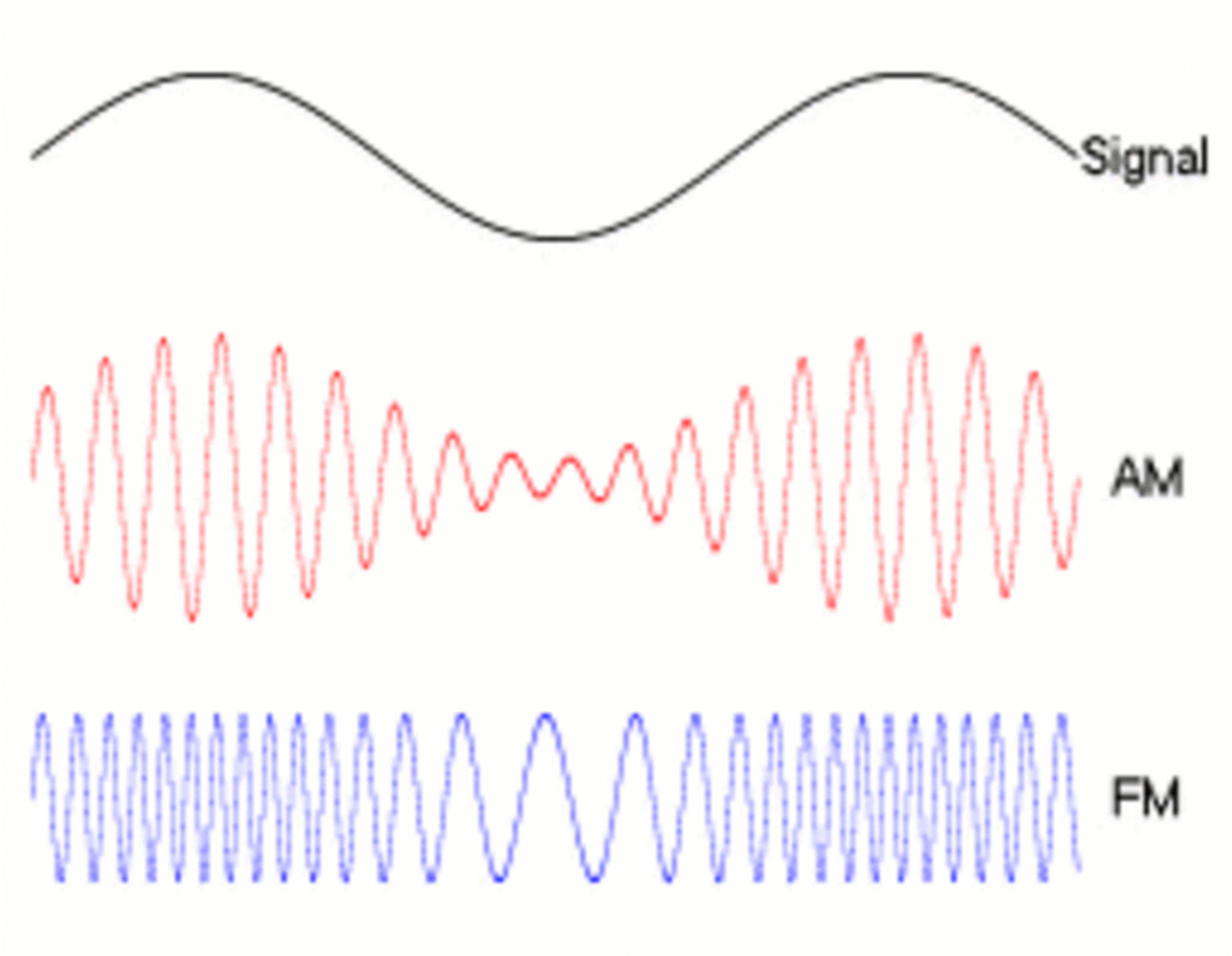
De fato, como cada componente harmônico agora terá $v_\varphi \neq v_g$ o pulso deverá se alargar com o tempo até finalmente se desfazer !

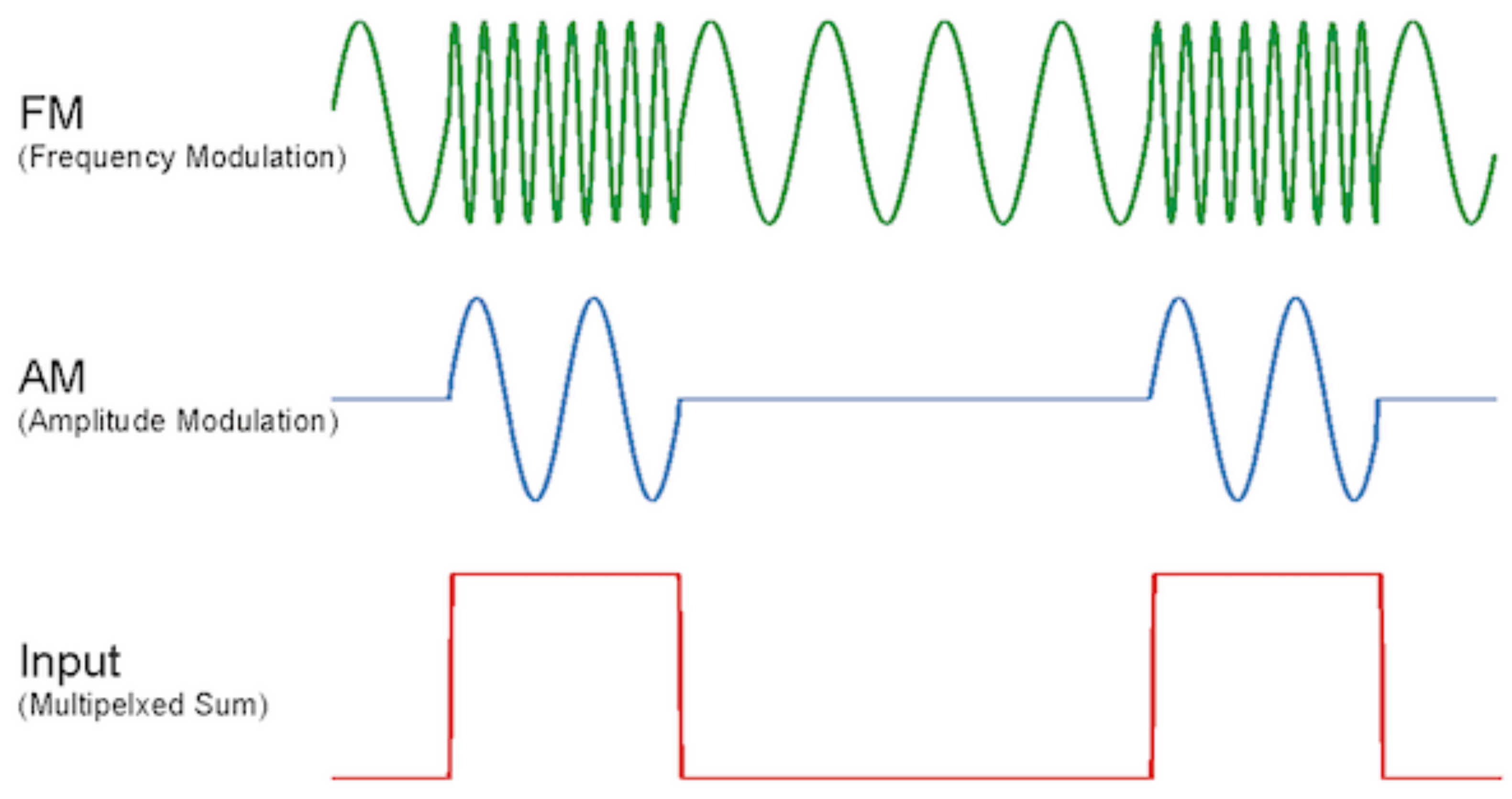
Como é então possível transportar informação em meios reais dispersivos?





Transmissão de Sinal





Transformada de Fourier

https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=699s