MAE1512 - Estatística para Licenciatura II

Correção da Provinha 1

O tempo adequado de troca de um amortecedor de certa marca em automóveis, sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado como uma variável contínua, medida em anos. Suponha que a função densidade é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2k} & , \quad 2 < x \leq 8 \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

a. Obtenha o valor de k para que a função acima seja, de fato, uma densidade.

Denotemos essa variável aleatória por X. Para que tenhamos uma densidade, devemos garantir que $\int f(x)\mathrm{d}x = 1$. Assim:

$$\int_0^2 \frac{1}{4}x\mathrm{d}x + \int_2^8 \frac{1}{2k}\mathrm{d}x = 1 \quad \Rightarrow \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 + \left[\frac{x}{2k}\right]_2^8 = \frac{1}{2} + \left(\frac{8}{2k} - \frac{2}{2k}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{k} = 1 \Rightarrow \frac{3}{k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 6$$

Assim a função de densidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{12} & , \quad 2 < x \leq 8 \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

b. Qual é a probabilidade de um automóvel, sujeito às condições descritas acima, necessitar de troca de amortecedores antes de 1 ano de uso? E entre 1 e 3 anos?

A primeira pergunta se resume a calcular $P(X \leq 1)$, que é dado por:

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{4}x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

A segunda é dada por $P(1 \leq X \leq 3)$, que é dado por:

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 3) &= P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{8} \\
&= \int_0^2 \frac{1}{4}x\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{12}\mathrm{d}x - \frac{1}{8} \\
&= \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{11}{24}
\end{aligned}
$$

c. Supondo que um automóvel está há 3 anos com o mesmo amortecedor, qual a probabilidade de que seja necessário fazer a troca antes de completar 4 anos de uso?

   Utilizando o teorema de Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 4|X > 3) &= \frac{P(X \leq 4, X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(3 < X \leq 4)}{P(X > 3)} \\
&= \frac{\int_3^4 \frac{1}{12}\mathrm{d}x}{\int_3^8 \frac{1}{12}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

d. Qual é o tempo médio adequado para a troca do amortecedor desses automóveis?

   Através da definição de esperança matemática temos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\frac{1}{4}x\mathrm{d}x + \int_2^8 x\frac{1}{12}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{4}\mathrm{d}x + \int_2^8 \frac{x}{12}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{24}\right]_2^8 \\
&= \frac{8}{12} + \left(\frac{64}{24} - \frac{4}{24}\right) = \frac{19}{6}
\end{aligned}
$$

   Assim, o tempo médio adequado para a troca do amortecedor é de $\frac{19}{6}$ (3,167) anos.

e. Determine o desvio padrão do tempo adequado para a troca de amortecedores.

   Pela definição do desvio padrão, temos que $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$. Assim, notando que $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\frac{1}{4}x\mathrm{d}x + \int_2^8 x^2\frac{1}{12}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \frac{x^3}{4}\mathrm{d}x + \int_2^8 \frac{x^2}{12}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{36}\right]_2^8 \\
&= \frac{16}{16} + \left(\frac{512}{36} - \frac{8}{36}\right) = 15
\end{aligned}
$$

Ainda:

$$E(X) = \frac{19}{6} \Rightarrow E^2(X) = \frac{361}{36}$$

E portanto:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 15 - \frac{361}{36} = \frac{179}{36} \quad (4,972) \Rightarrow \\ DP(X) &= \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{179}{36}} \quad (2,230) \end{aligned}$$

f. Calcule a mediana e a moda do tempo adequado para a troca de amortecedores.

Pela definição de Mediana temos:

$$P(X \geq Md) = 0,5 = P(X \leq Md)$$

Notando que:

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{4} x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} = P(X \geq 2) \Rightarrow Md = 2.$$

Pela definição de Moda:

$$f(Mo) = \max_x f(x) \Rightarrow x = 2, f(2) = \frac{1}{2} = \max_x f(x) \Rightarrow Mo = 2.$$