

# LOM3202 – CIRCUITOS ELÉTRICOS

## AULA 4

Prof. Dr. Emerson G. Melo

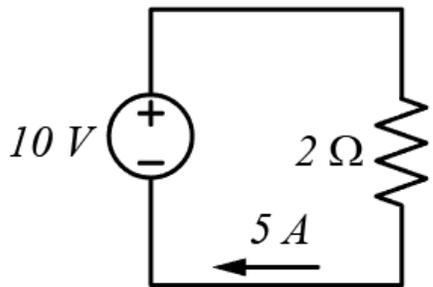
- Linearidade;
- Superposição;
- Transformação de Fontes;
- Teorema de Thévenin;
- Teorema de Norton;
- Máxima Transferência de Potência.

Um circuito é linear se ele for tanto homogêneo quanto aditivo.

## Homogeneidade

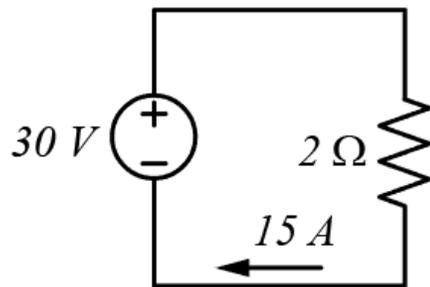
$$V = IR$$

$$I \propto V$$



$$10 = 2I$$

$$I = 5 A$$



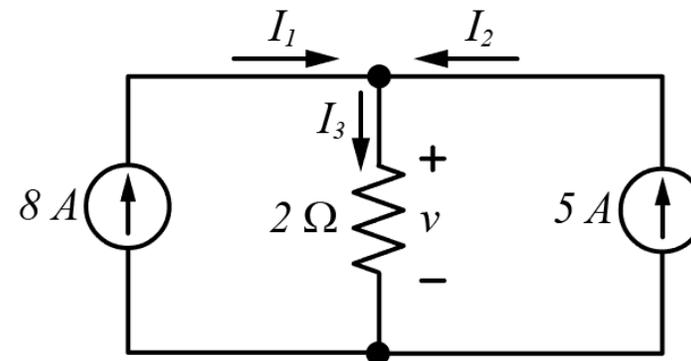
$$30 = 2I$$

$$I = 15 A$$

$$\frac{30}{10} = \frac{15}{5} = 3$$

A resposta é proporcional ao estímulo

## Aditividade



$$v = I_3 R$$

$$v = (I_1 + I_2) R$$

$$v = I_1 R + I_2 R$$

$$v = 8 \times 2 + 5 \times 2$$

$$v = 16 + 10 = 26 V$$

A resposta para a soma de entradas é igual a soma das respostas a cada entrada aplicada separadamente

$$v_1 = I_1 R$$

$$v_2 = I_2 R$$

$$v_1 = 8 \times 2$$

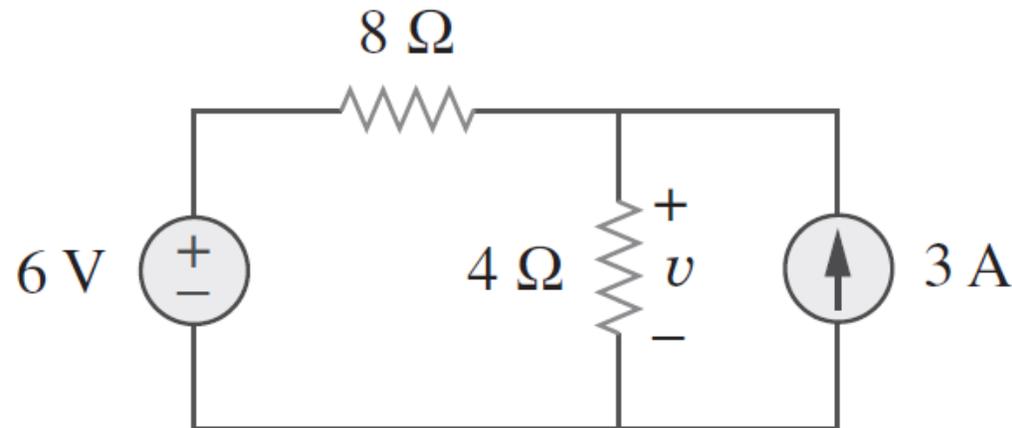
$$v_2 = 5 \times 2$$

$$v_1 = 16 V$$

$$v_2 = 10 V$$

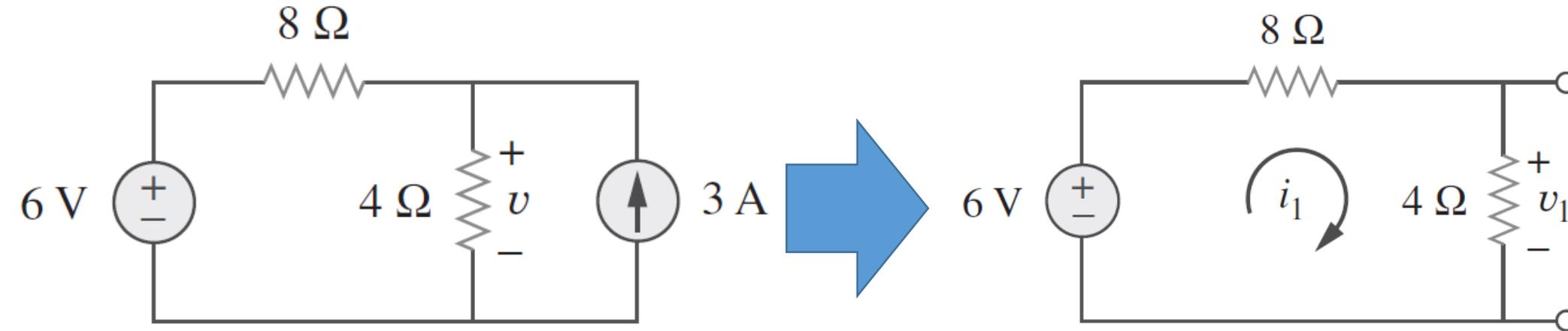
$$v = v_1 + v_2 = 16 + 10 = 26 V$$

- ❑ O princípio da superposição afirma que a tensão (ou corrente) em um elemento de circuito linear é a soma algébrica das tensões (ou correntes) naquele elemento em virtude da atuação isolada de cada uma das fontes independentes.
- ❑ Ele é válido apenas para circuitos lineares.



# Superposição: Exemplo

- 1 – Deixar apenas uma fonte independente (tensão ou corrente) ativa no circuito e calcular a resposta em função dessa fonte.



Fonte de corrente em 0 A (circuito aberto)

$$8i_1 + 4i_1 - 6 = 0$$

$$12i_1 = 6$$

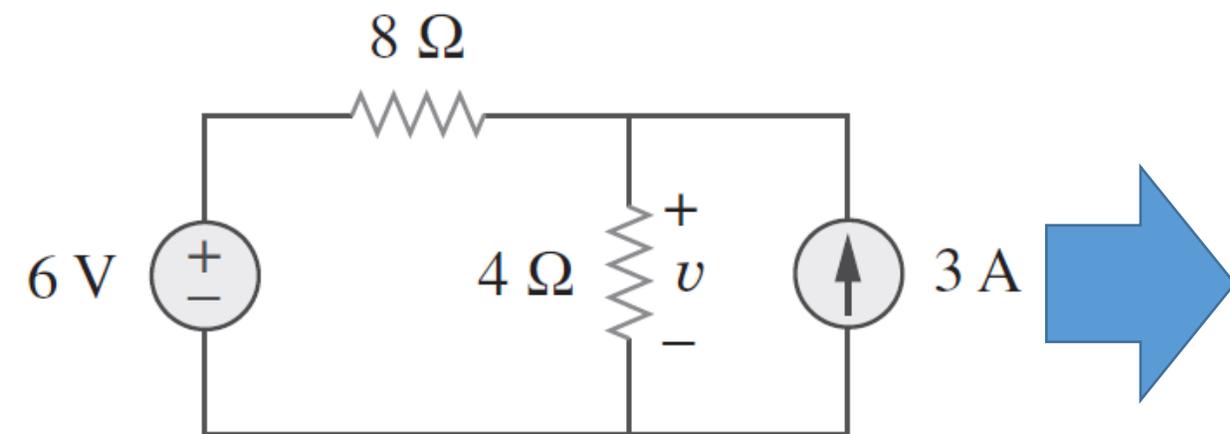
$$i_1 = 0,5 A$$

$$v_1 = 0,5 A \times 4\Omega$$

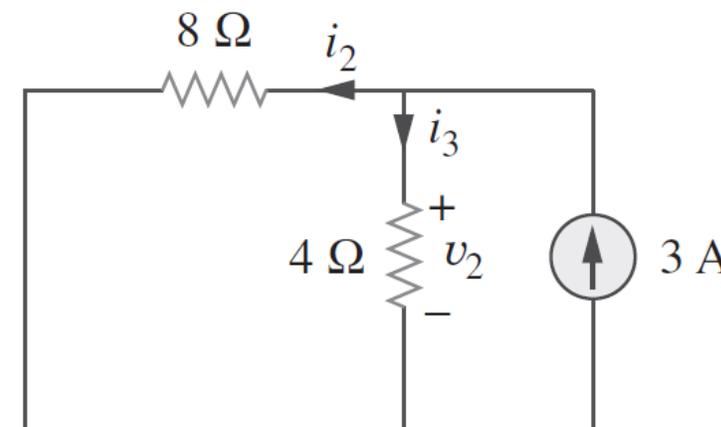
$$v_1 = 2 V$$

# Superposição: Exemplo

2 – Repetir o procedimento para todas as fontes independentes do circuito.



Fonte de tensão em 0 V (curto-circuito)



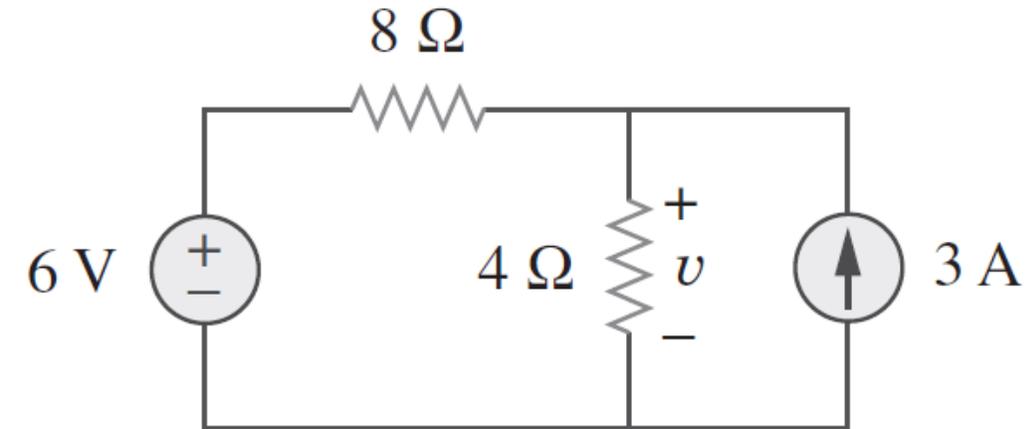
$$i_3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} 3 \quad i_3 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} 3 \quad i_3 = \frac{8}{12} 3 \quad i_3 = 2 A$$

$$v_2 = 2 A \times 4 \Omega$$

$$v_2 = 8 V$$

# Superposição: Exemplo

- 3 – A resposta é obtida pela soma das contribuições individuais de cada fonte independente.



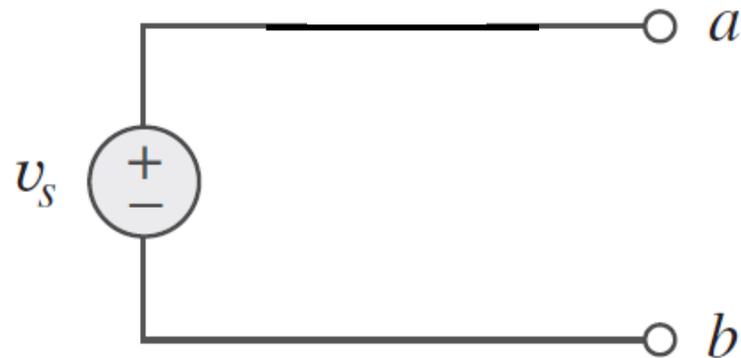
$$v = v_1 + v_2$$

$$v = 2 + 8$$

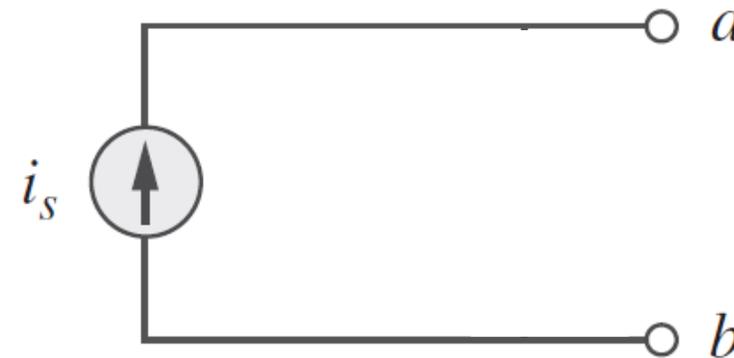
$$v = 10 \text{ V}$$

## Fontes Ideais.

Fonte de Tensão Ideal:  $R = 0\Omega$



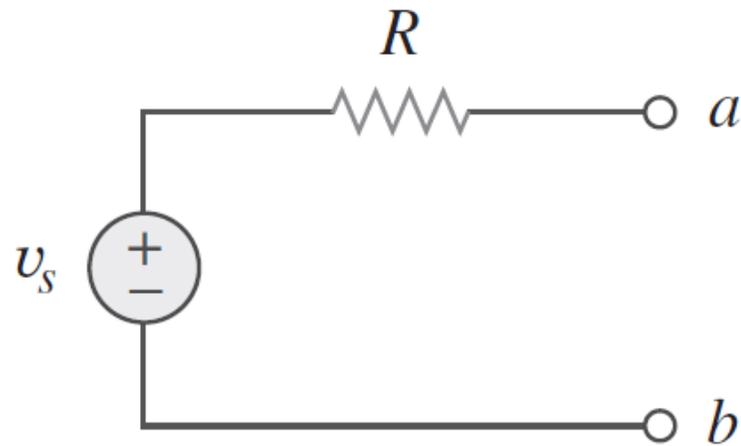
Fonte de Corrente Ideal:  $R = 0\Omega$



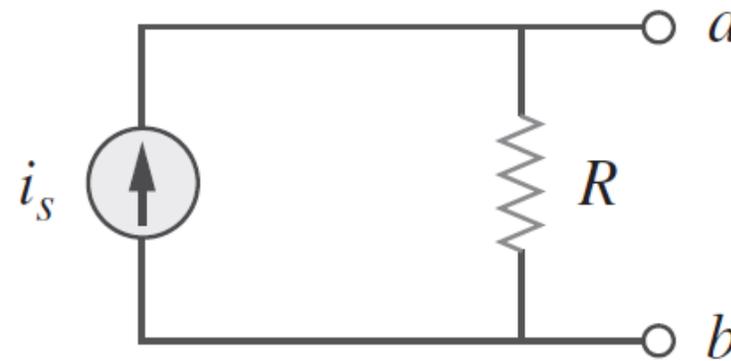
# Transformação de Fontes

## Fontes Reais.

Fonte de Tensão Real:  $R \neq 0\Omega$

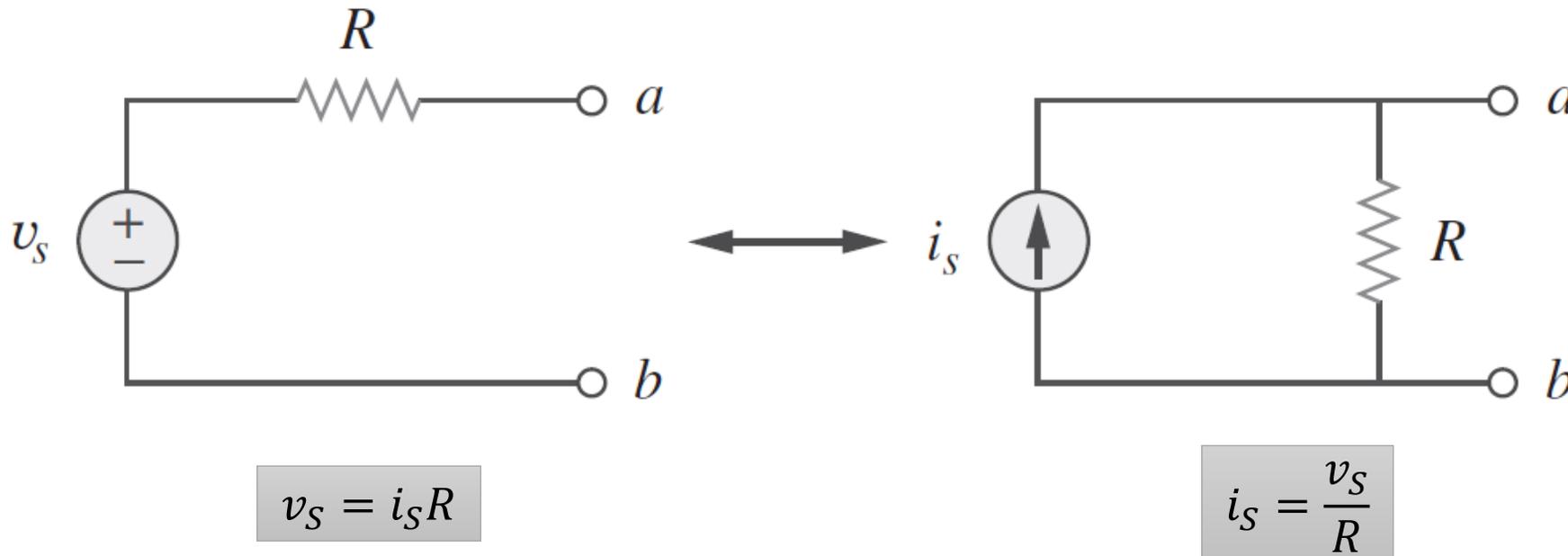


Fonte de Corrente Ideal:  $R \neq 0\Omega$



# Transformação de Fontes

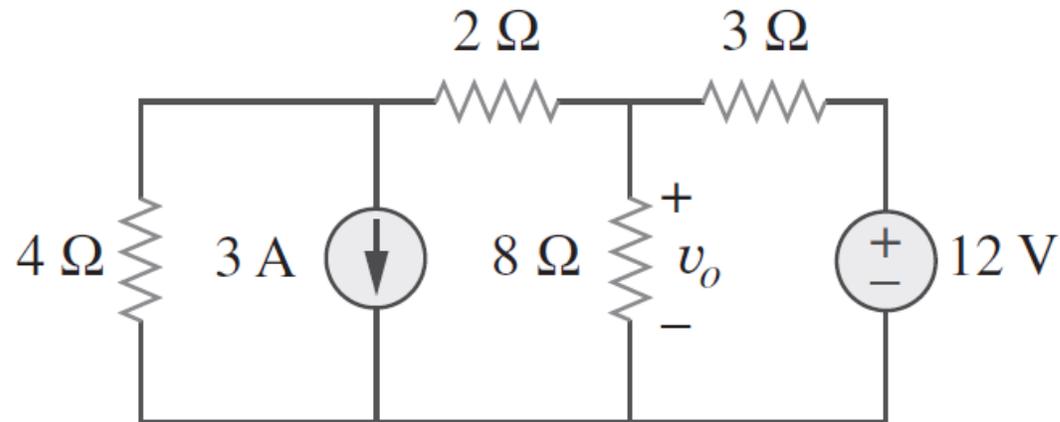
- Processo de substituir uma fonte de tensão  $v_S$  em série com um resistor  $R$  por uma fonte de corrente  $i_S$  em paralelo com um resistor  $R$ , ou vice-versa.



Não é possível realizar conversões entre fontes de tensão ( $R = 0$ ) ou corrente ( $R = \infty$ ) ideais

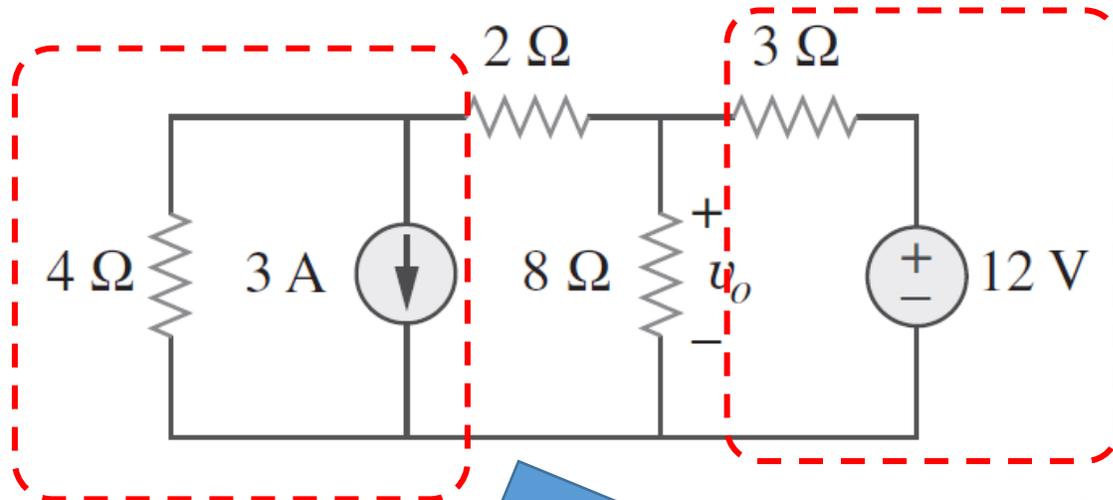
# Transformação de Fontes: Exemplo

- Usando transformação de fontes encontrar o valor de  $v_o$ .



# Transformação de Fontes: Exemplo

Usando transformação de fontes encontrar o valor de  $v_0$ .



$$v_S = i_S R$$

$$v_S = 3 \times 4$$

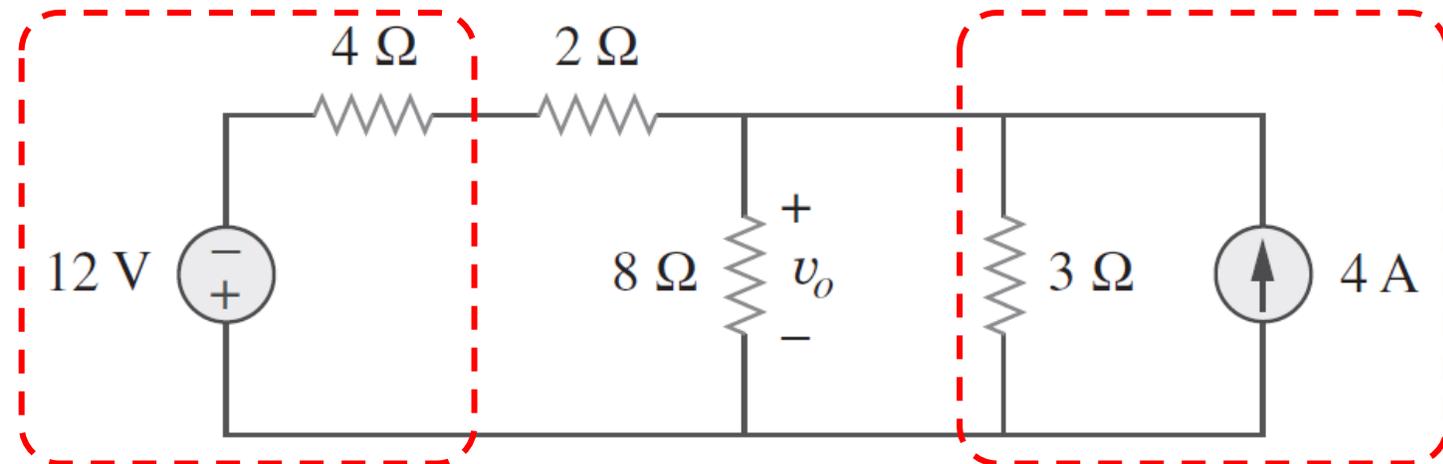
$$v_S = 12 \text{ V}$$

$$i_S = \frac{v_S}{R}$$

$$i_S = \frac{12}{3}$$

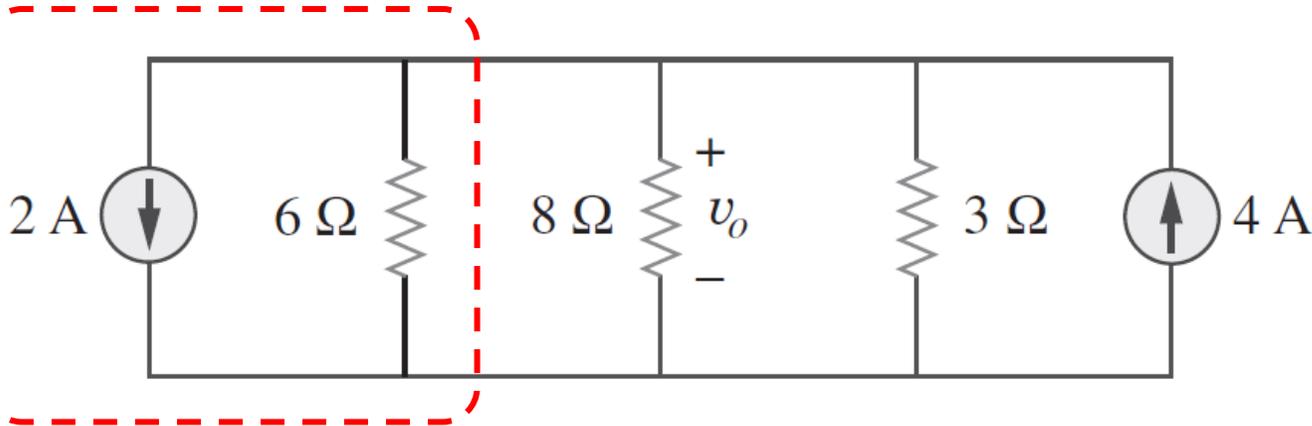
$$i_S = 4 \text{ A}$$

Atenção ao sentido da corrente para determinar a posição dos terminais + e -

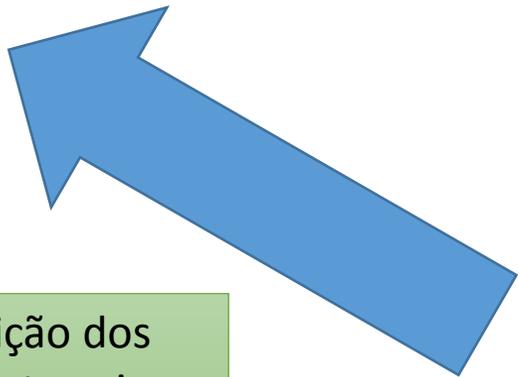


# Transformação de Fontes: Exemplo

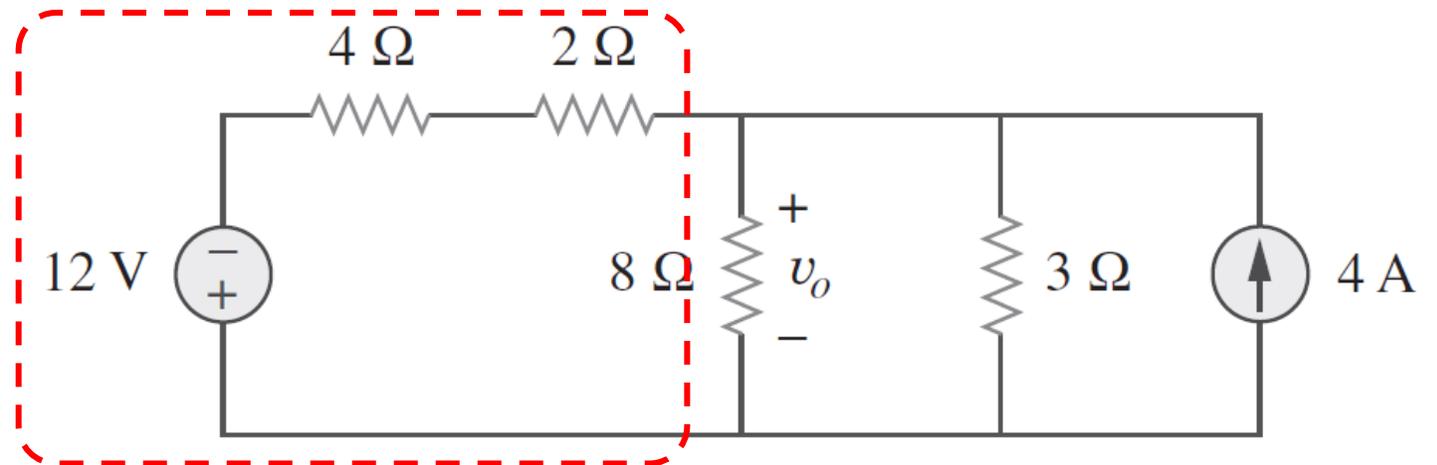
Usando transformação de fontes encontrar o valor de  $v_0$ .



$$i_s = \frac{v_s}{R}$$
$$i_s = \frac{12}{4 + 2}$$
$$i_s = 2 A$$

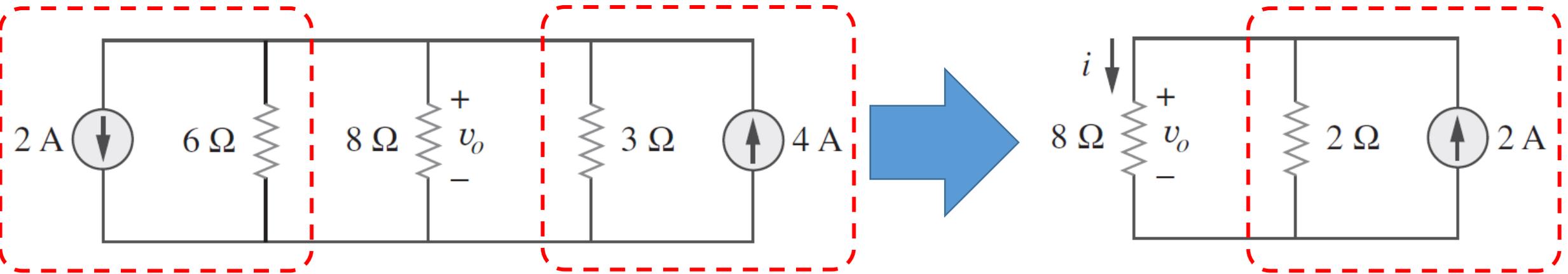


Atenção com a posição dos terminais + e - para determinar o sentido da corrente



# Transformação de Fontes: Exemplo

Usando transformação de fontes encontrar o valor de  $v_0$ .



$$4 A - 2 A = 2 A$$

$$R_{eq} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2 \Omega$$

$$i = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}} 2$$

$$i = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}} 2$$

$$i = \frac{8}{40} 2$$

$$i = \frac{4}{10}$$

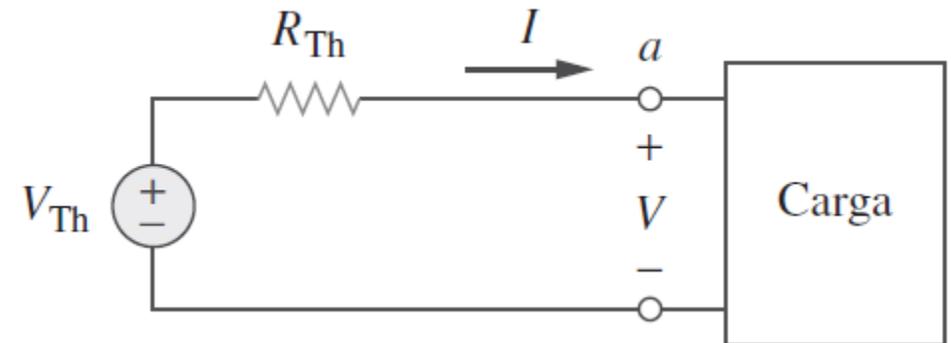
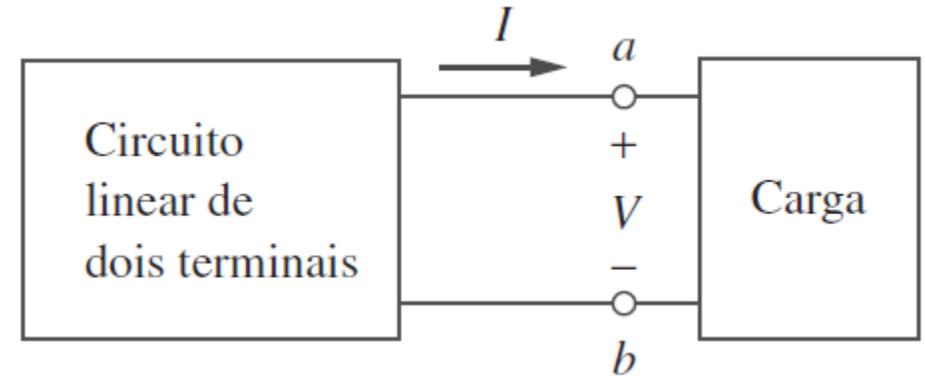
$$i = 0,4 A$$

$$v_0 = 0,4 A \times 8 \Omega$$

$$v_0 = 3,2 V$$

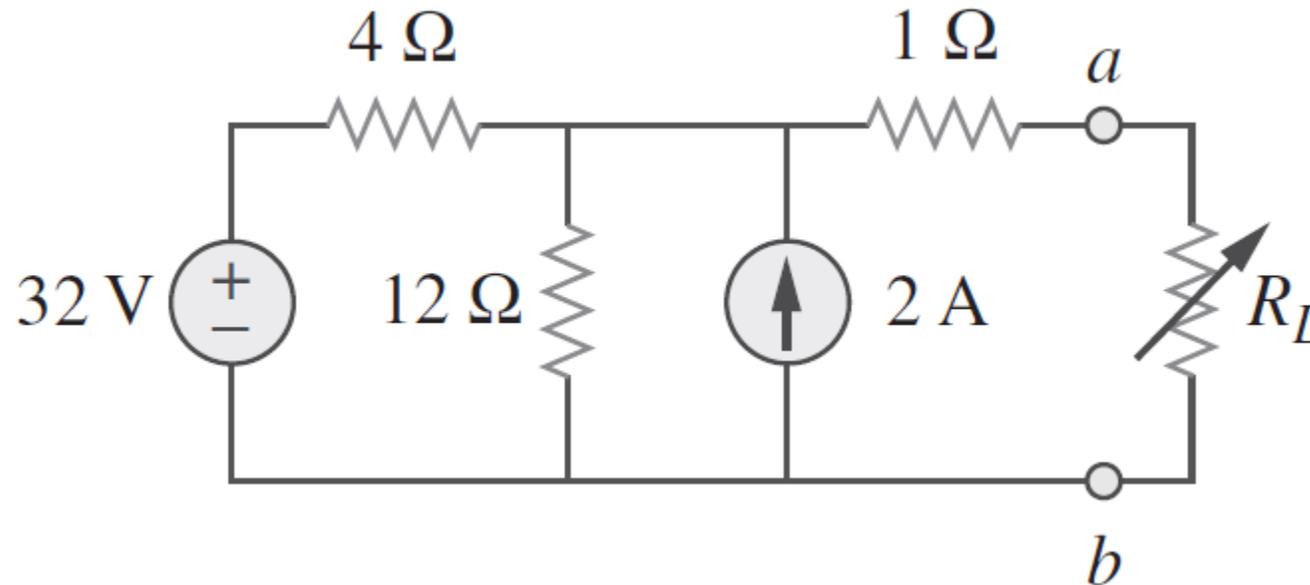
# Teorema de Thévenin

- ❑ O teorema de Thévenin afirma que um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de tensão  $V_{Th}$  em série com um resistor  $R_{Th}$ .
- ❑  $V_{Th}$  é a tensão de circuito aberto nos terminais  $a$  e  $b$ .
- ❑  $R_{Th}$  é a resistência de entrada ou resistência equivalente nos terminais  $a$  e  $b$  quando as fontes independentes forem desativadas;
- ❑ Muito útil para analisar circuitos com cargas variáveis, pois evita a necessidade de analisar todo o circuito sempre que a carga é alterada.



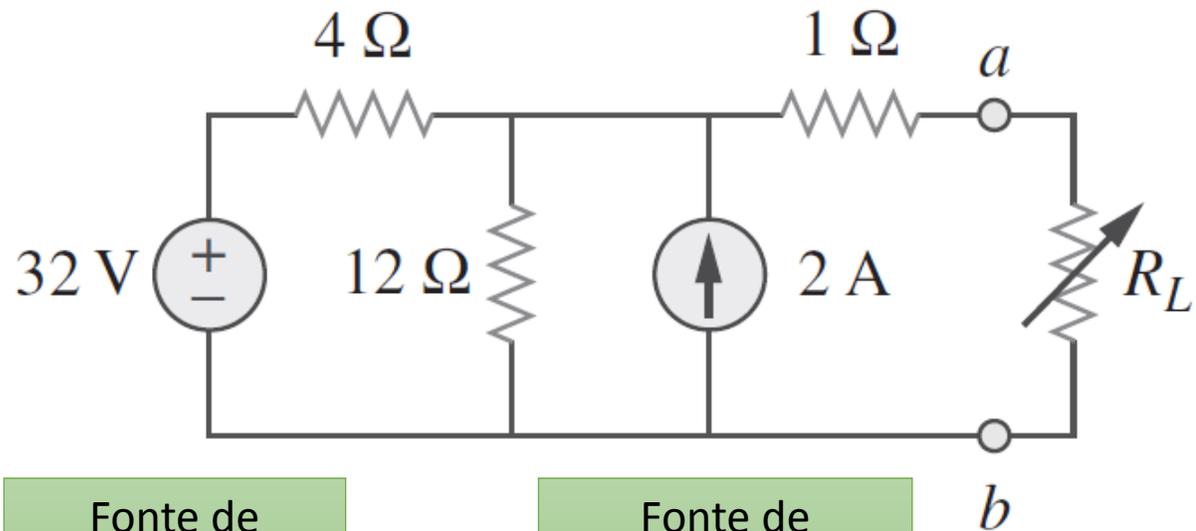
# Teorema de Thévenin: Exemplo

- Determinar o circuito equivalente de Thévenin e calcular a corrente através de  $R_L = 6\Omega$  e  $R_L = 36\Omega$ .



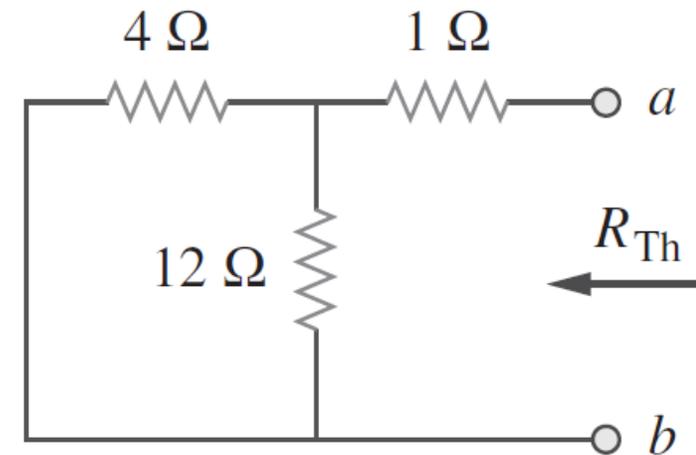
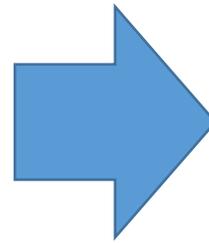
# Teorema de Thévenin: Exemplo

- 1 – Desativar as fontes independentes de tensão ou corrente e calcular o valor de  $R_{Th}$ .



Fonte de tensão em 0 V (curto-circuito)

Fonte de corrente em 0 A (circuito aberto)

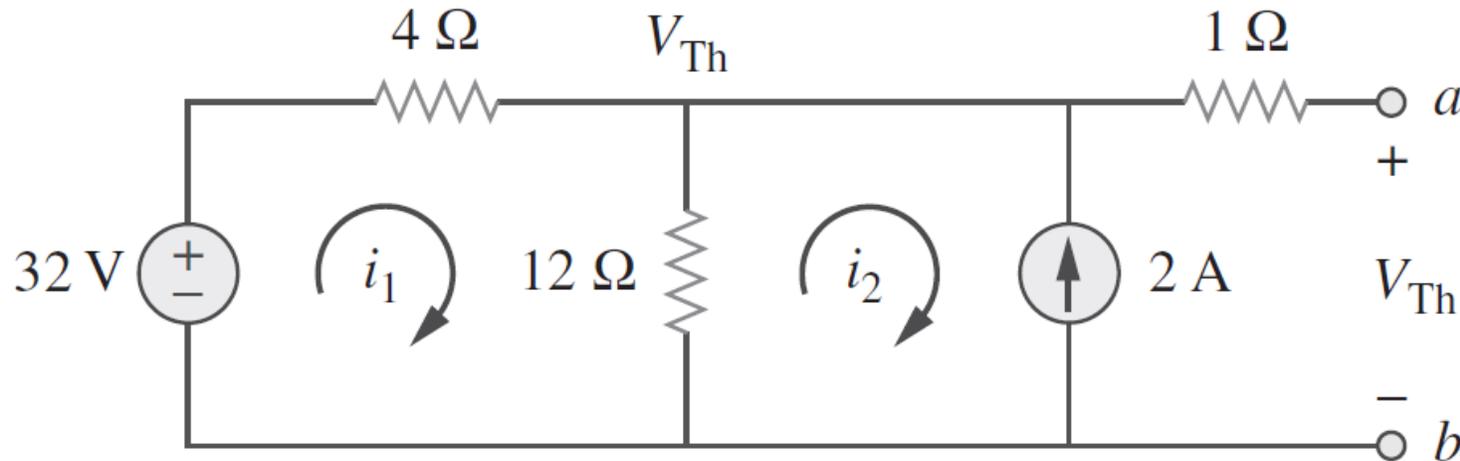


$$R_{Th} = 1 + \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 1 + \frac{48}{16} = 1 + 3$$

$$R_{Th} = 4\Omega$$

# Teorema de Thévenin: Exemplo

- 2 – Considerando o efeito de todas as fontes, calcular a tensão de circuito aberto entre os terminais  $a$  e  $b$ .



$$i_2 = -2$$

$$(4 + 12)i_1 - 12i_2 - 32 = 0$$

$$16i_1 - 12 \times (-2) = 32$$

$$i_1 = \frac{8}{16} = 0,5 \text{ A}$$

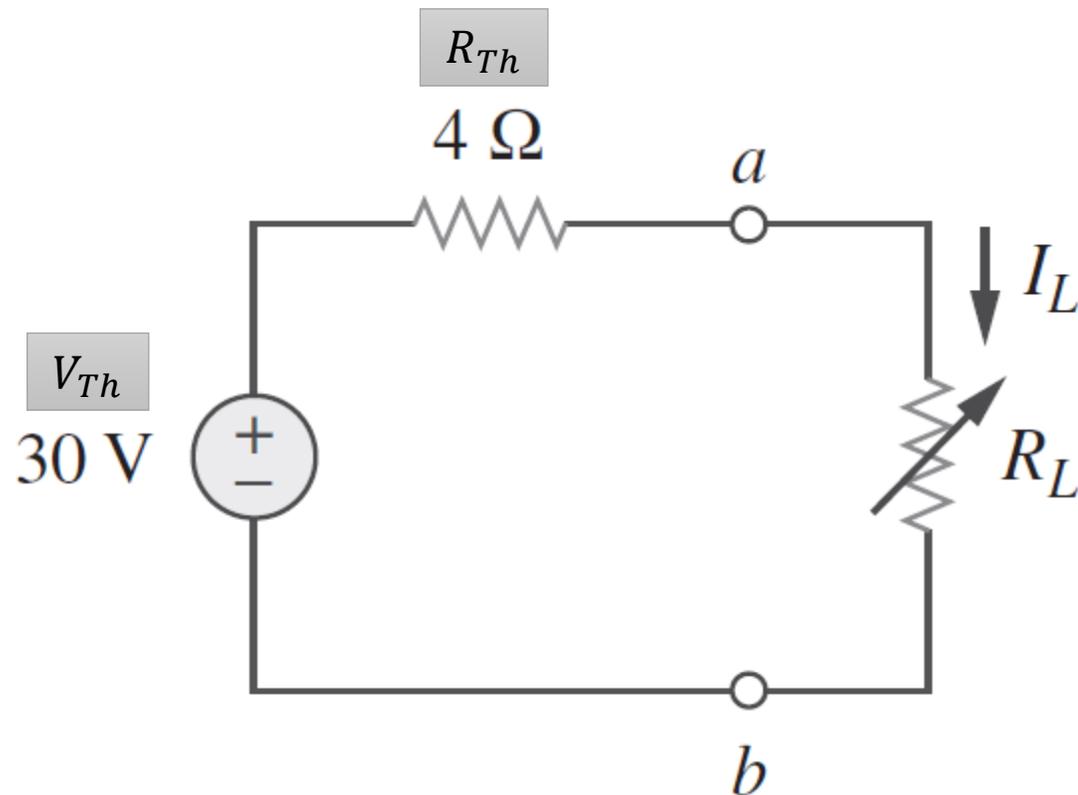
$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2)$$

$$V_{Th} = 12 \times (0,5 + 2)$$

$$V_{Th} = 30 \text{ V}$$

# Teorema de Thévenin: Exemplo

- Determinar o circuito equivalente de Thévenin e calcular a corrente através de  $R_L = 6\Omega$  e  $R_L = 36\Omega$ .



$$R_L = 6\Omega$$

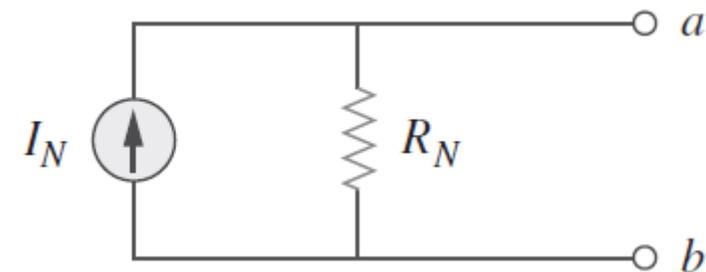
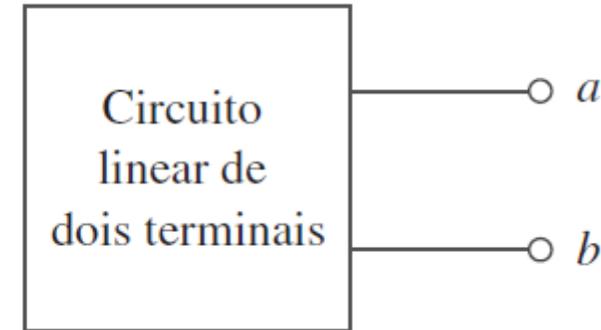
$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + 6} = 3\text{ A}$$

$$R_L = 36\Omega$$

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + 36} = 0,75\text{ A}$$

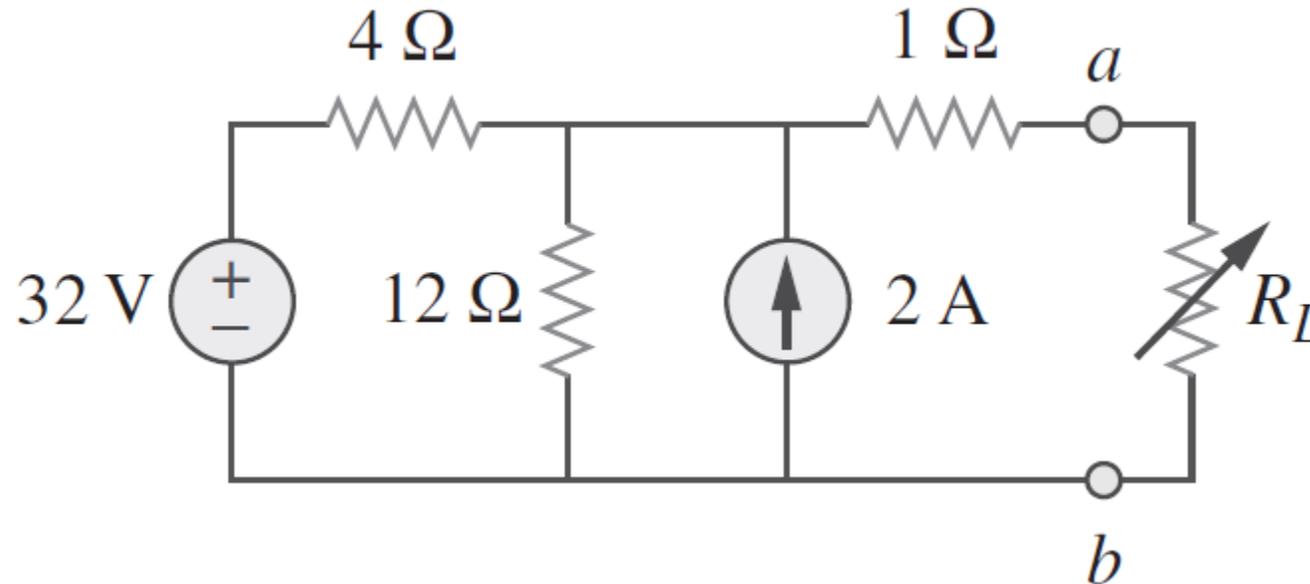
# Teorema de Norton

- ❑ O teorema de Norton afirma que um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de corrente  $I_N$  em paralelo com um resistor  $R_N$ .
- ❑  $I_N$  é a corrente de curto-circuito através dos terminais  $a$  e  $b$ .
- ❑  $R_N$  é a resistência de entrada ou equivalente nos terminais  $a$  e  $b$  quando as fontes independentes forem desligadas.
- ❑ Muito semelhante ao teorema de Thévenin.



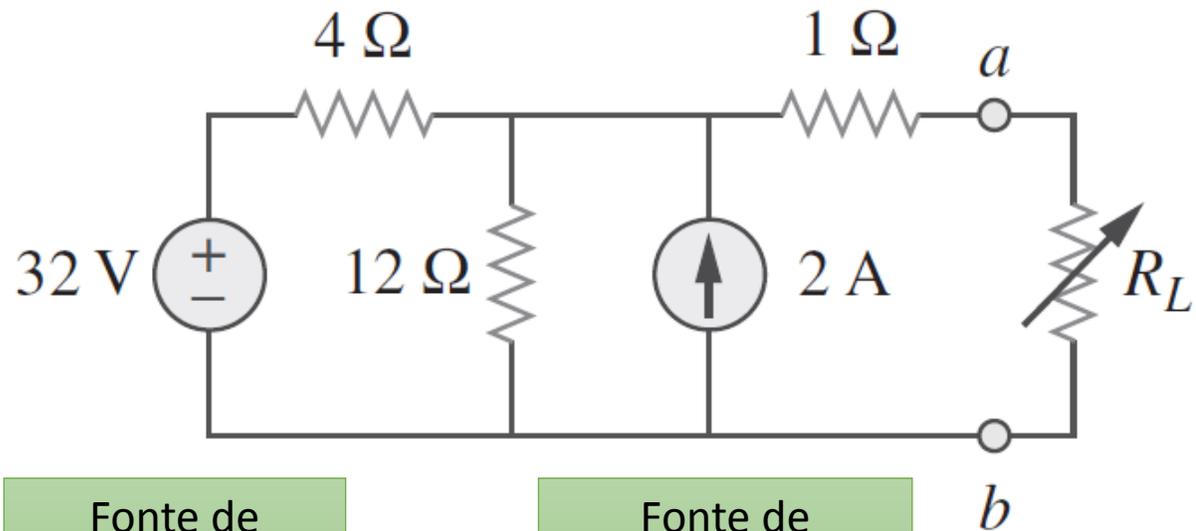
# Teorema de Norton: Exemplo

- Determinar o circuito equivalente de Norton e calcular a corrente através de  $R_L = 6\Omega$  e  $R_L = 36\Omega$ .



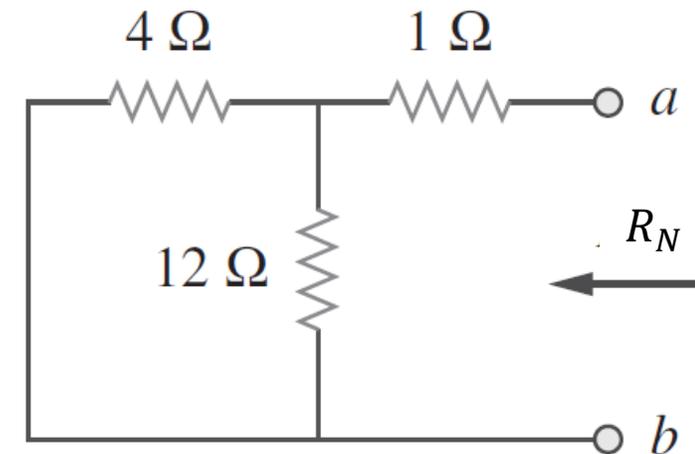
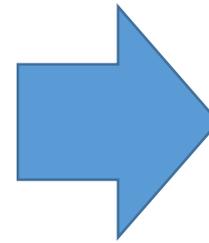
# Teorema de Norton: Exemplo

- 1 – Desativar as fontes independentes de tensão ou corrente e calcular o valor de  $R_N$ .



Fonte de tensão em 0 V (curto-circuito)

Fonte de corrente em 0 A (circuito aberto)



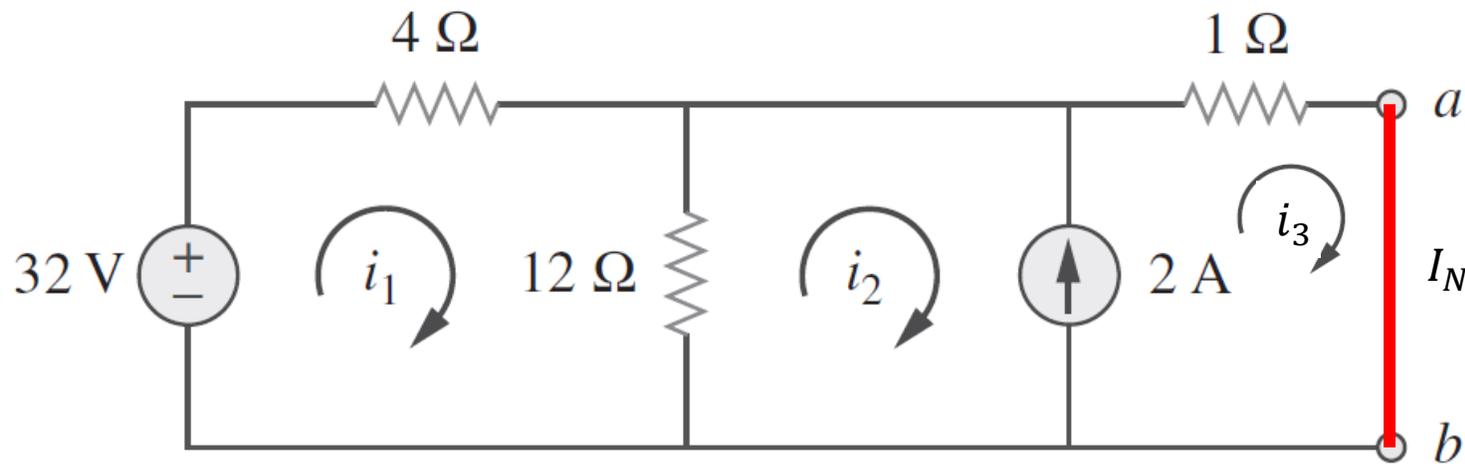
$$R_N = 1 + \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 1 + \frac{48}{16} = 1 + 3$$

$$R_N = 4\Omega$$

$$R_N = R_{Th}$$

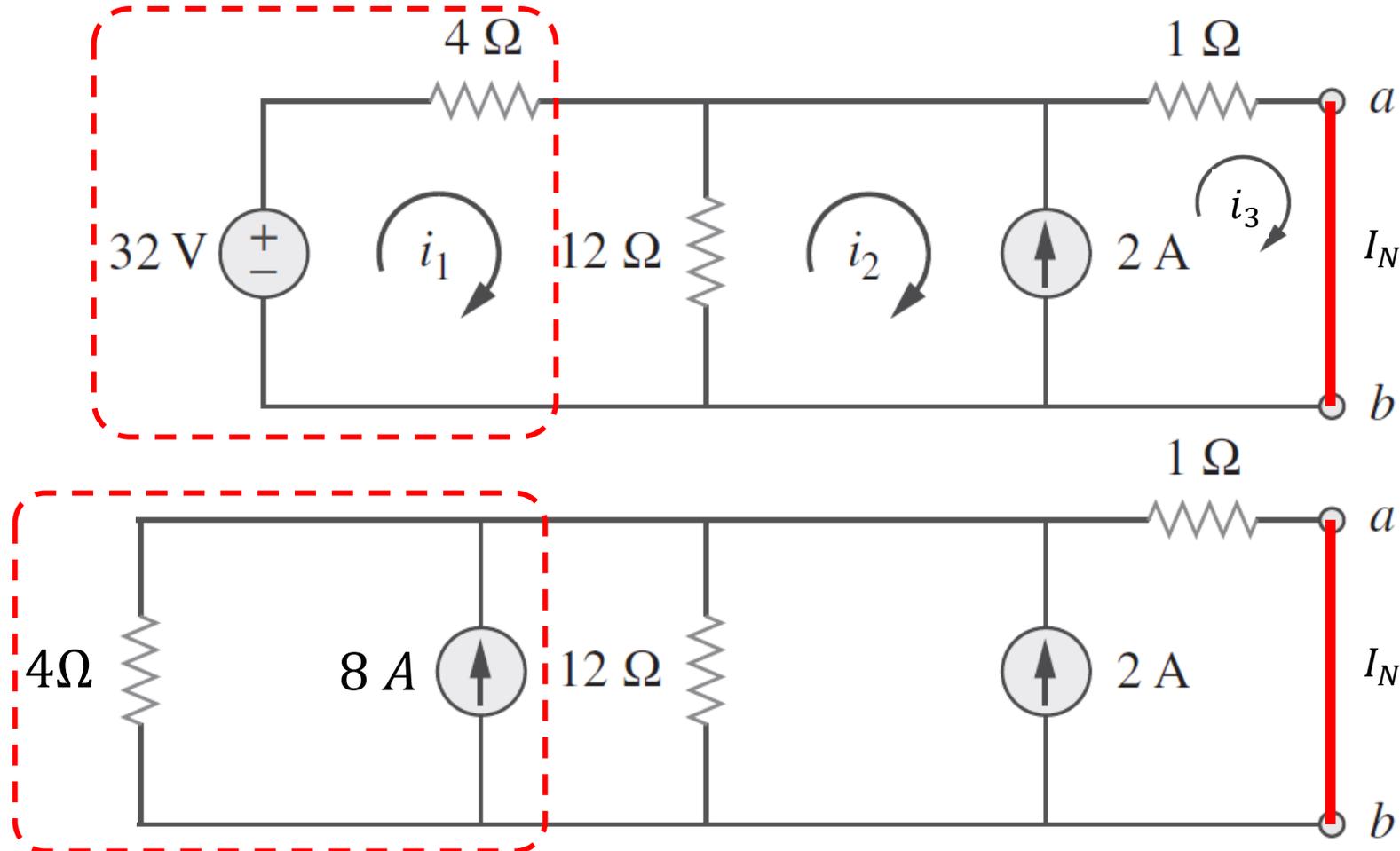
# Teorema de Norton: Exemplo

- 2 – Considerando o efeito de todas as fontes, calcular a corrente de curto-circuito entre os terminais  $a$  e  $b$ .



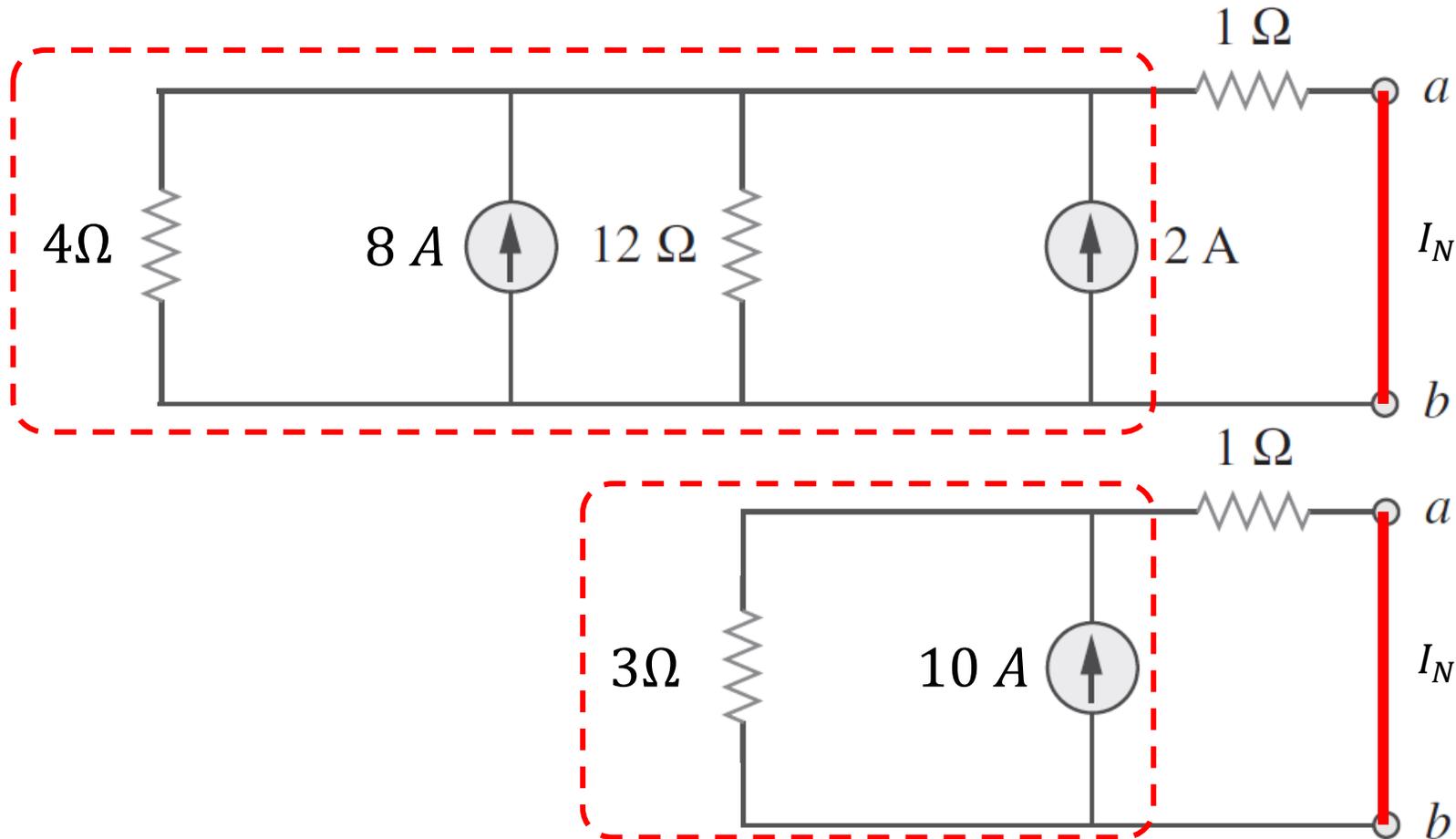
# Teorema de Norton: Exemplo

- 2 – Considerando o efeito de todas as fontes, calcular a corrente de curto-circuito entre os terminais  $a$  e  $b$ .



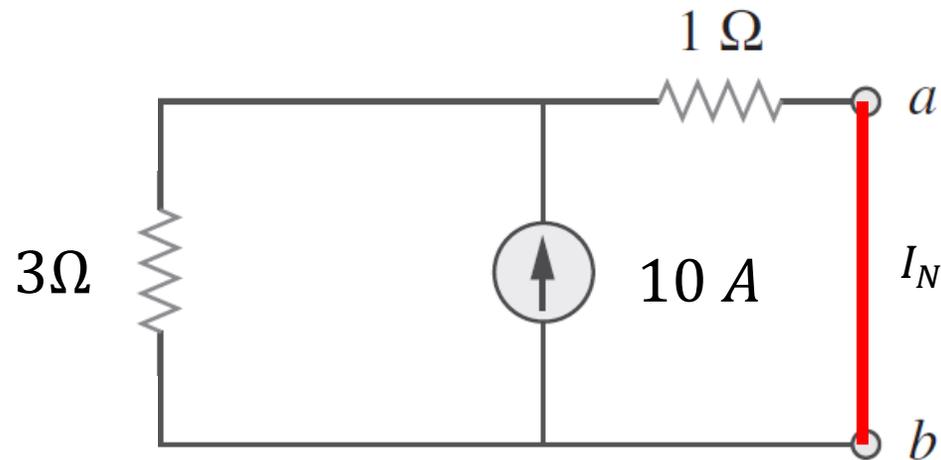
# Teorema de Norton: Exemplo

- 2 – Considerando o efeito de todas as fontes, calcular a corrente de curto-circuito entre os terminais  $a$  e  $b$ .



# Teorema de Norton: Exemplo

- 2 – Considerando o efeito de todas as fontes, calcular a corrente de curto-circuito entre os terminais  $a$  e  $b$ .

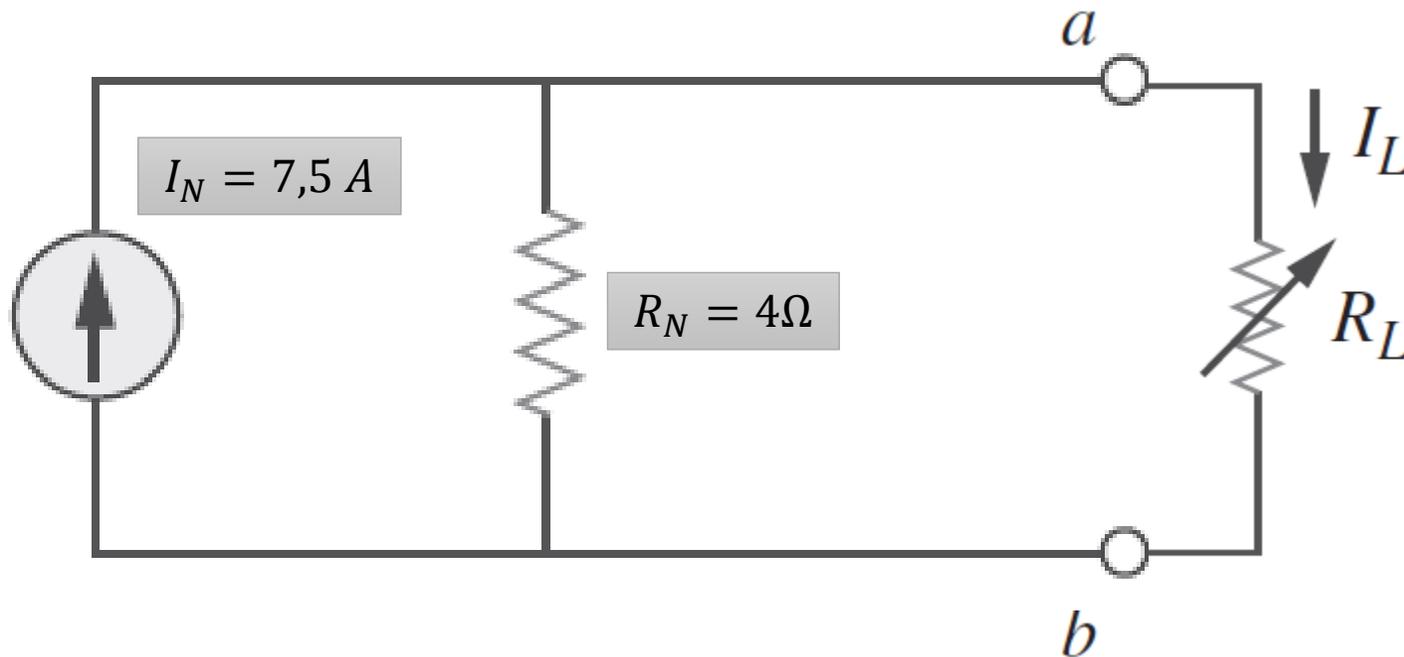


$$I_N = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}} 10 = \frac{1}{\frac{4}{3}} 10 = \frac{3}{4} 10$$

$$I_N = 7,5\text{ A}$$

# Teorema de Norton: Exemplo

- Determinar o circuito equivalente de Norton e calcular a corrente através de  $R_L = 6\Omega$  e  $R_L = 36\Omega$ .



$$R_L = 6\Omega$$

$$I_L = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} 7,5 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} 7,5 = \frac{12}{30} 7,5$$

$$I_L = 3 A$$

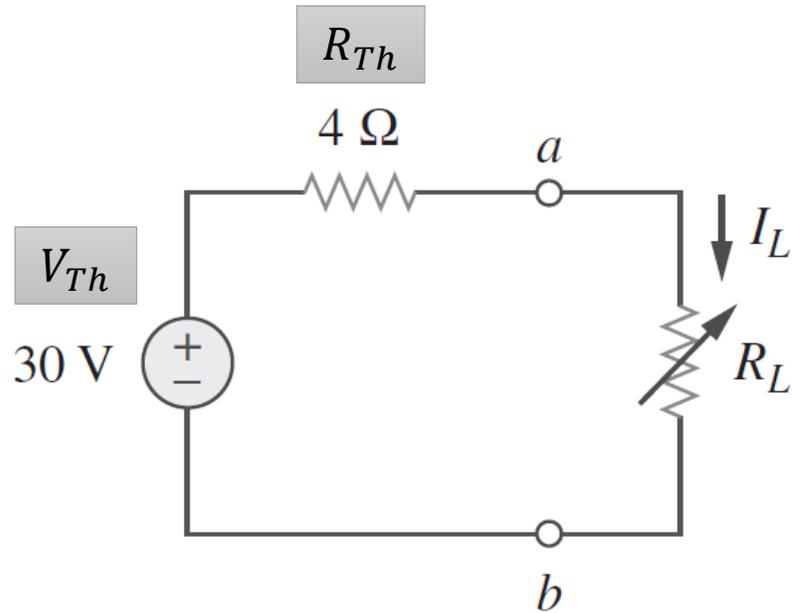
$$R_L = 36\Omega$$

$$I_L = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{36} + \frac{1}{4}} 7,5 = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{10}{36}} 7,5 = \frac{36}{360} 7,5$$

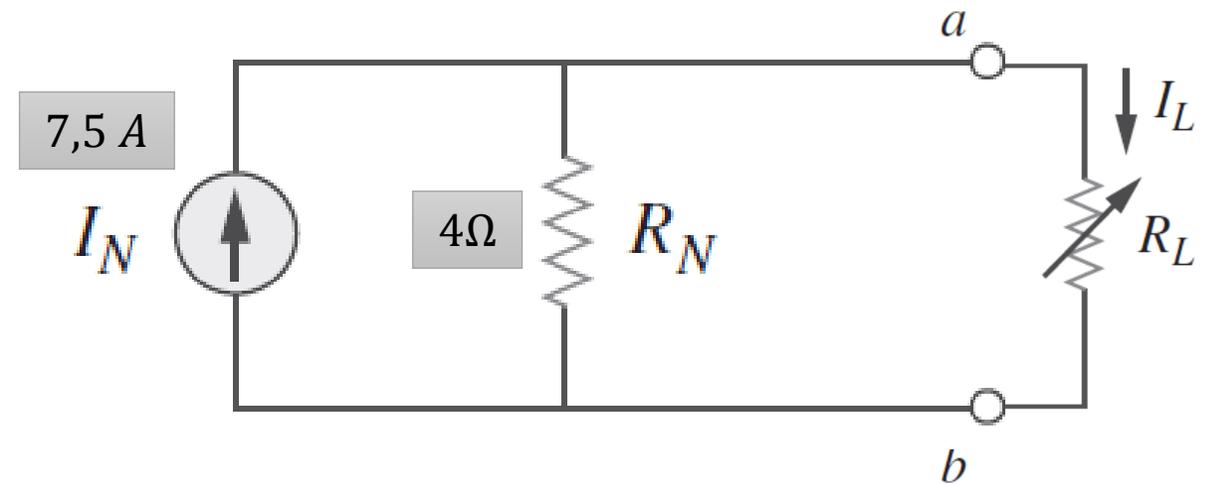
$$I_L = 0,75 A$$

# Transformação Thévenin/Norton

É possível transformar o equivalente de Thévenin em Norton e vice-versa.



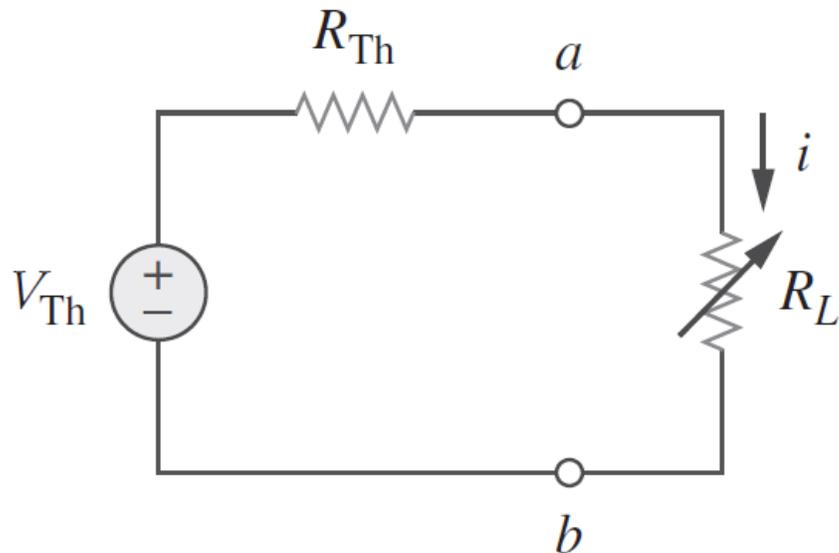
$$V_{Th} = I_N R_N$$



$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

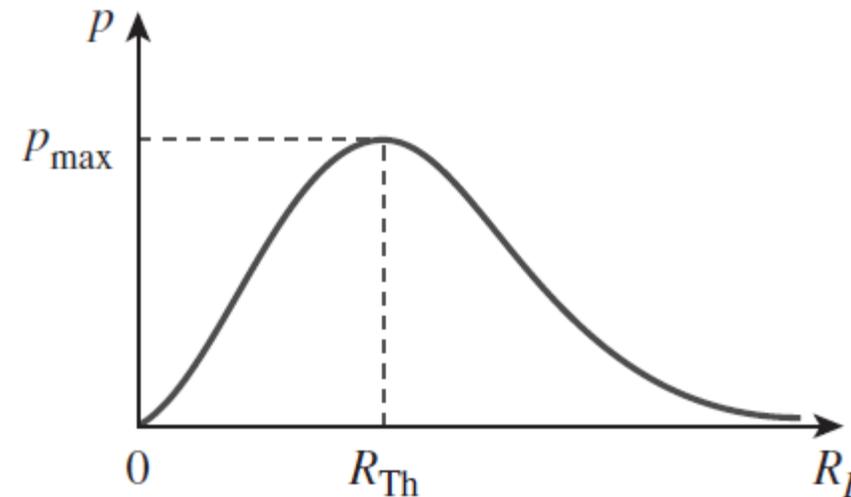
# Máxima Transferência de Potência

- Teorema da Potência Máxima: utilizado para maximizar a potência transferida para uma carga suprida por um circuito com perdas internas conhecidas.

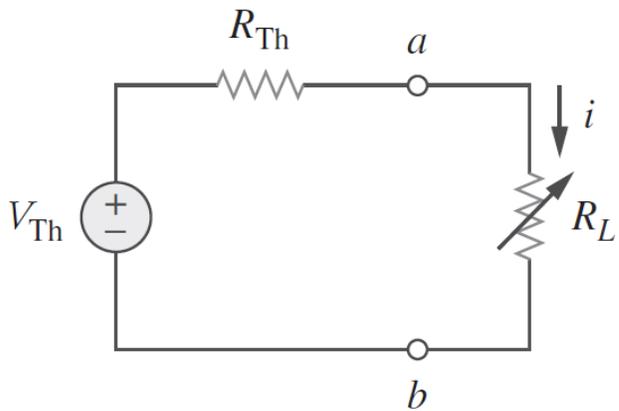


$$p = vi = i^2 R_L$$

$$p = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$



# Máxima Transferência de Potência



$$p = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$

$$p = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L = \frac{V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2} R_L = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2} V_{Th}^2$$

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{\frac{dR_L}{dR_L} (R_{Th} + R_L)^2 - R_L \frac{d(R_{Th} + R_L)^2}{dR_L}}{(R_{Th} + R_L)^4} \right]$$

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - R_L(2R_{Th} + 2R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right]$$

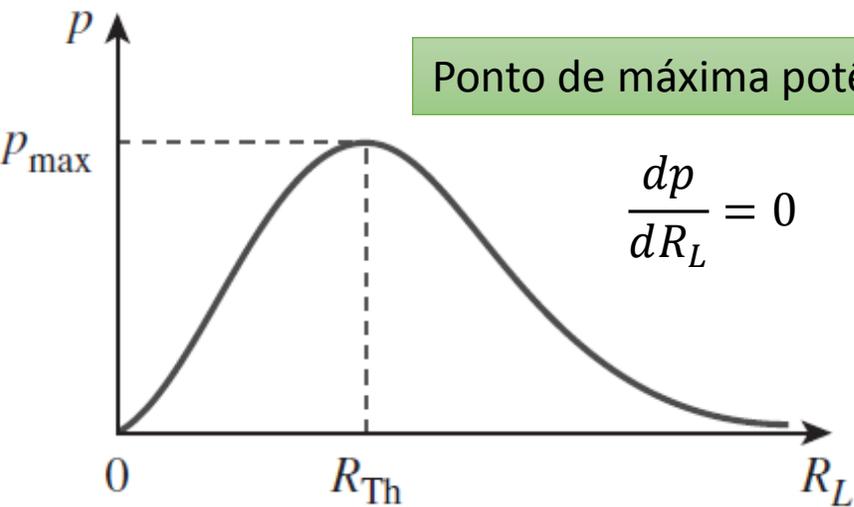
$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right]$$

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{R_{Th} + R_L - 2R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] = V_{Th}^2 \left[ \frac{R_{Th} - R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} \right]$$

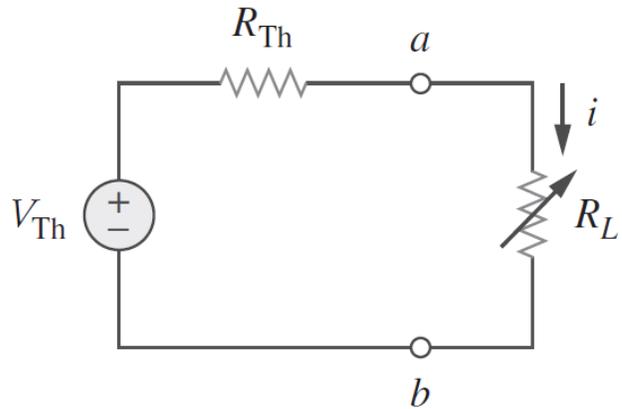
$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{R_{Th} - R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] = 0 \quad \left| \begin{array}{l} R_{Th} - R_L = 0 \\ R_{Th} = R_L \end{array} \right.$$

A máxima potência é obtida quando  $R_L = R_{Th}$

Ponto de máxima potência



# Máxima Transferência de Potência



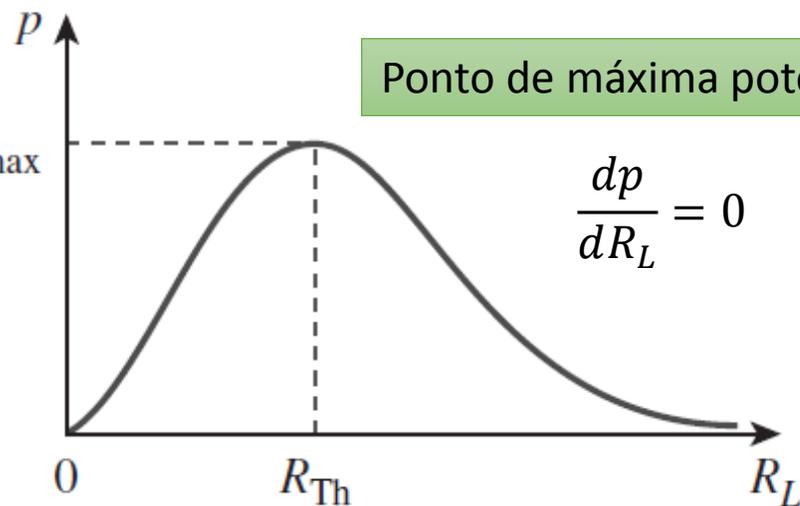
$$p = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$

A máxima  
potência é obtida  
quando  $R_L = R_{Th}$

$$p = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L = \frac{V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2} R_L = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2} V_{Th}^2$$

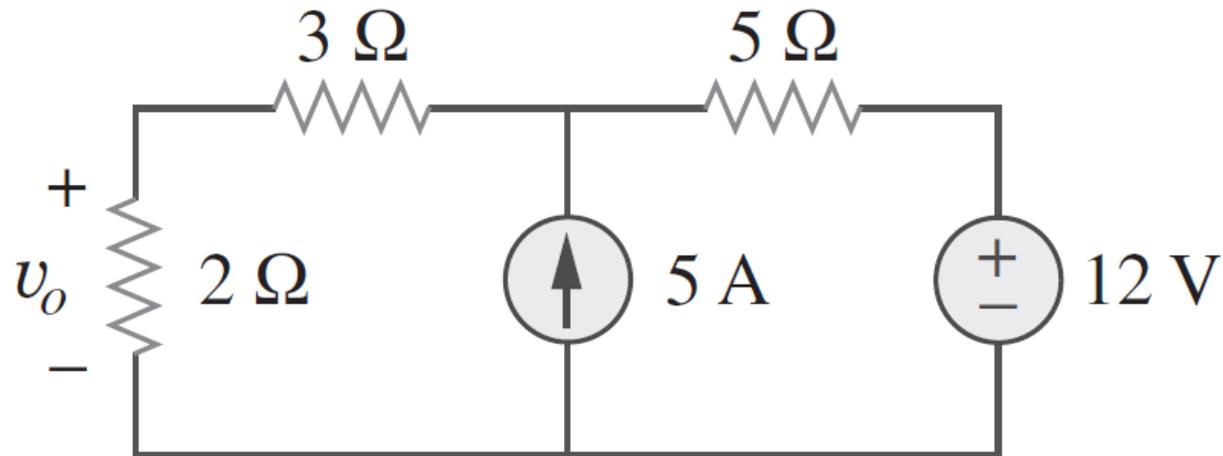
$$p_{max} = \frac{R_{Th}}{(R_{Th} + R_{Th})^2} V_{Th}^2 = \frac{R_{Th}}{(2R_{Th})^2} V_{Th}^2 = \frac{R_{Th}}{4R_{Th}^2} V_{Th}^2$$

$$p_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$



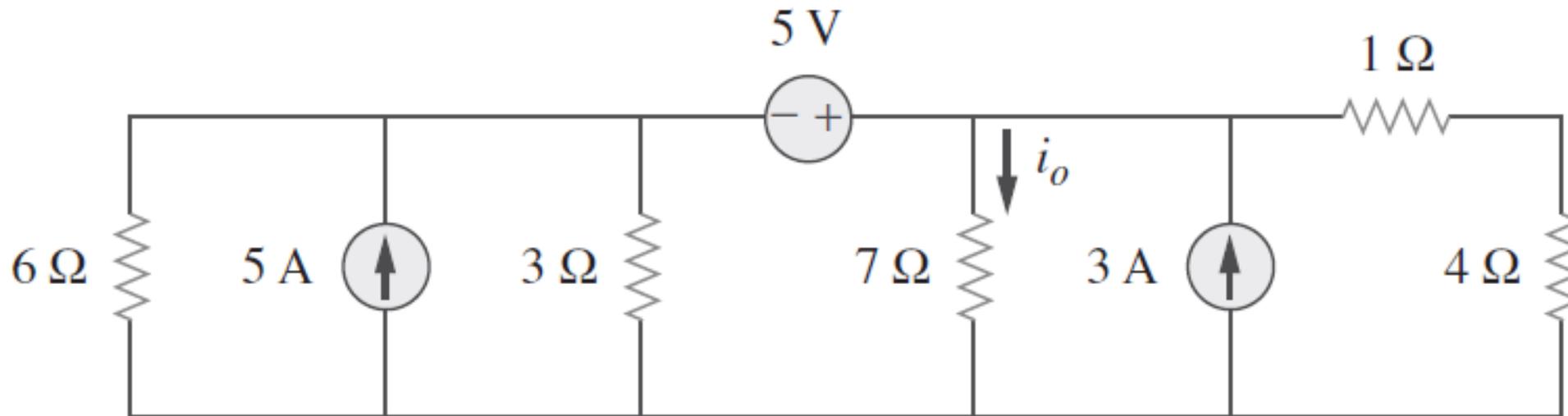
# Exercícios Propostos

- 1 – Usando o teorema da superposição, encontre o valor de  $v_0$ .



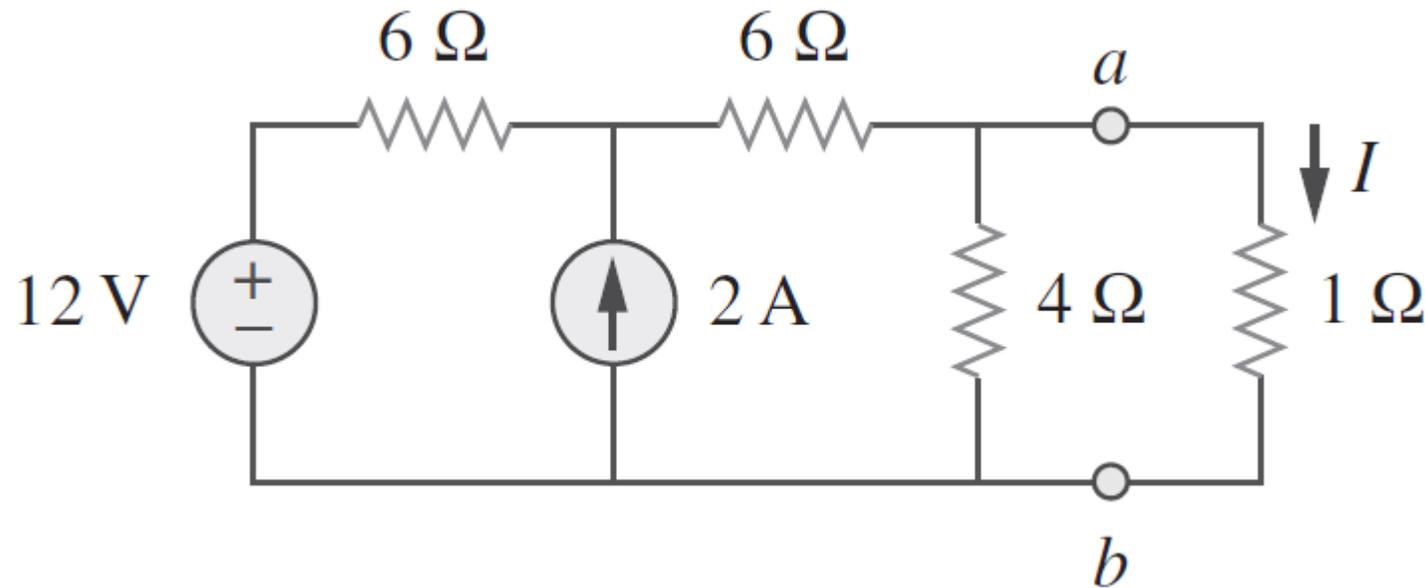
$$v_0 = 7,4\ \text{V}$$

□ 2 – Usando transformação de fontes, determine  $i_0$ .



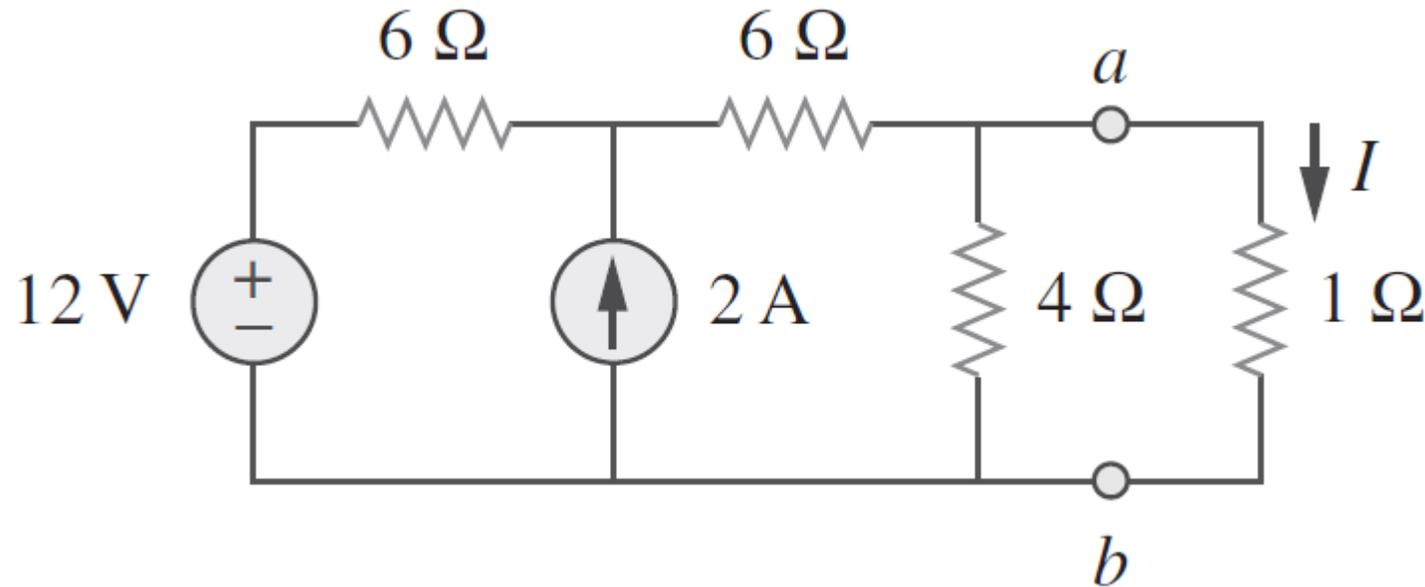
$$i_0 = 1,78 \text{ A}$$

- 3 – Determine o circuito equivalente de Thévenin e depois o valor de  $I$ .



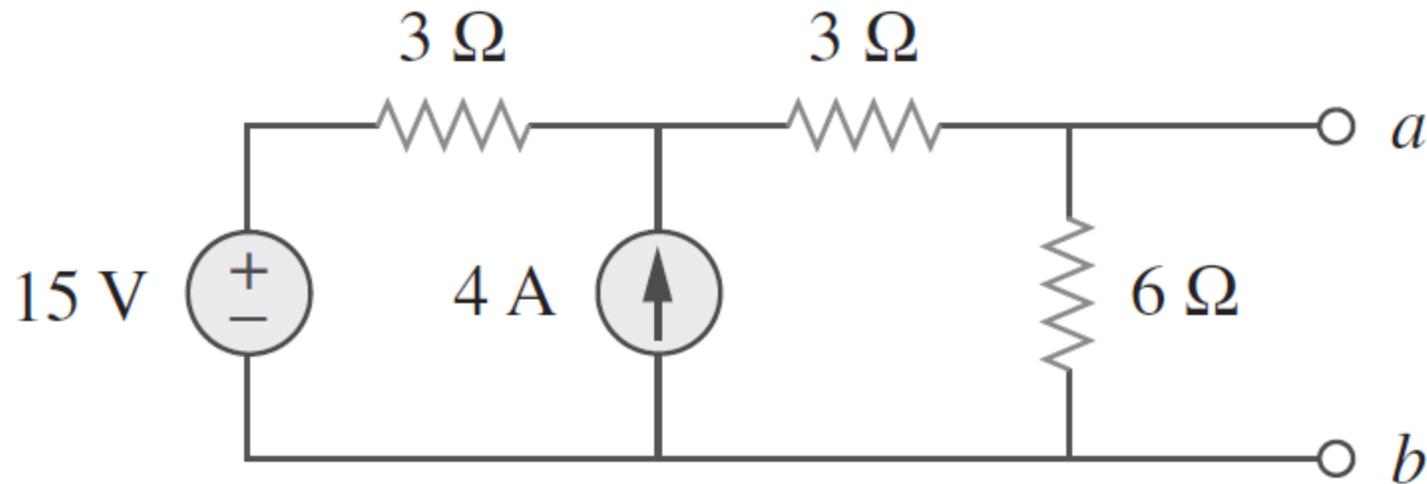
$$V_{Th} = 6 V; R_{Th} = 3 \Omega; I = 1,5 A$$

- 4 – Confira o resultado do exercício 3 através do Teorema de Norton.



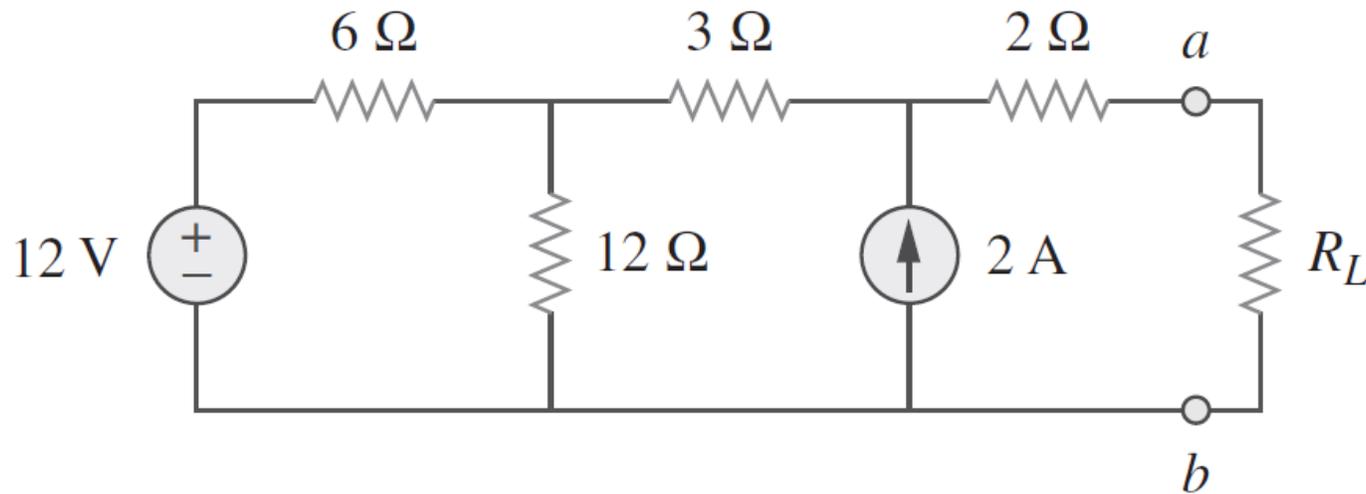
$$I_N = 2 \text{ A}; R_N = 3 \text{ } \Omega; I = 1,5 \text{ A}$$

□ 5 – Determine o Equivalente de Norton.



$$I_N = 4,5 \text{ A}; R_N = 3 \Omega$$

- 6 – Determine o valor da carga conectada entre os terminais  $a$  e  $b$  para que ocorra a máxima transferência de potência. Qual o valor da máxima potência?



$$R_L = 9 \Omega; p_{max} = 13,44 W$$

- ❑ J. W. Nilsson, e S. A. Riedel, “Electric Circuits”, 9 ed., New York, Prentice Hall (2011).
- ❑ W. H. Hyat, J. E. Kemmerly, e S. M Durbin, “Análise de Circuitos em Engenharia”, 7 ed., São Paulo, McGraw-Hill (2008).
- ❑ C. K. Alexander, e M. N. O. Sadiku, “Fundamentos de Circuitos Elétricos”, 5 ed., Porto Alegre, AMGH (2013).
- ❑ M. N. O. Sadiku, “Elementos de Eletromagnetismo”, 3 ed., Porto Alegre, Bookman (2004).