Derivadas Parciais

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0, consideramos g uma função de uma variável dada por $g(x) = f(x, y_0)$. A derivada de g no ponto x_0 (caso exista) é chamada a derivada parcial de f, em relação a x, no ponto (x_0, y_0) e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Deste modo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

De maneira análoga, definimos a derivada parcial de f, em relação a y, no ponto (x_0, y_0) e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Observação:

a) De maneira análoga, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada em relação a x, de $f(x, y)$ mantendo-se y constante. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada em relação a y, de $f(x, y)$ mantendo-se x constante.

b) Seja A for o maior subconjunto de D_f onde existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. A função $\frac{\partial f}{\partial x} : A \to \mathbb{R}$ que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é chamada a função derivada parcial (de primeira ordem), em relação a x.

c) Seja B for o maior subconjunto de D_f onde existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. A função $\frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é chamada a função derivada parcial (de primeira ordem), em relação a y.

Exemplo

Seja $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. *Calcule as derivadas parciais de* f.

solução:

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ devemos olhar y como constante e derivar em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$$

Por outro lado, para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ devemos olhar x como constante e derivar em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. *Calcule as derivadas parciais de* f.

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - x^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\frac{(-2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = e^{x^2y} + xy^2 + \sin xy$. *Calcule as derivadas parciais de* f.

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xye^{x^2y} + y^2 + y\cos xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{x^2y} + 2xy + x\cos xy$$

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
b) Mostre que f *não é contínua em* $(0,0)$.

solução:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

b) Considere $\gamma_1(t) = (t, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, 0)$. Temos que

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq \lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

logo, não existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ e portanto f não é contínua em $(0, 0)$.

Observação

A existência das derivadas parciais de uma função em um ponto não implica em geral que a função seja contínua neste dado ponto. Deste modo, a existência das derivadas parciais não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma variável real.

Interpretação geométrica:
Suponha que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, é a intersecção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente T a esta intersecção no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Para uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0, z_0) define de maneira análoga as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}$$

Exemplo

Seja $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz + 1$. *Calcule* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$

solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2 + xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3z^2 + xy$$